Lycée du Parc
Année 2024-2025
DS 10

Devoir surveillé 10.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.
Calculatrice interdite.

Partie A :

Cette partie doit être rédigée sur une copie séparée précisant nom, classe et partie traitée.

Exercice 1 (Préliminaire). Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel.

Déterminer la distance de $v = (-1, 3, 2)$ au sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;|\; x - y + 4z = 0\}.$$

Exercice 2 (Un produit scalaire sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$).

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

On note

$$V = \{f \in E \,|\, f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{f \in E \,|\, f'' = f\}.$$

On définit, pour $f, g \in E$,

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Pour $t \in [0, 1]$, on pose $\varphi(t) = e^t$ et $\psi(t) = e^{-t}$.

1. Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $f \in E$.
   (a) Montrer que $\langle f \mid \varphi \rangle = ef(1) - f(0)$, et calculer de même $\langle f \mid \psi \rangle$ et $\langle \varphi \mid \psi \rangle$.
   (b) Montrer que W est de dimension finie et en déterminer une base orthonormale.
   (c) Soit p la projection orthogonale sur W. Préciser le projeté orthogonal $p(f)$ de f sur W.
   (d) Soit $g = f - p(f)$. Montrer que $g \in V$.
3. Démontrer que $V = W^\perp$, où $W^\perp$ est l'orthogonal de W dans E.

Partie B

Cette partie doit être rédigée sur une copie séparée précisant nom, classe et partie traitée.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible.
2. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 4 (Triangles aléatoires)**.** Soit $n \geq 3$ un entier et $p \in]0,1[$ un réel.
On appelle graphe non orienté un ensemble de points, appelés sommets, reliés par des lignes, appelées arêtes.
Pour générer des graphes non orientés de manière aléatoire, on se donne :

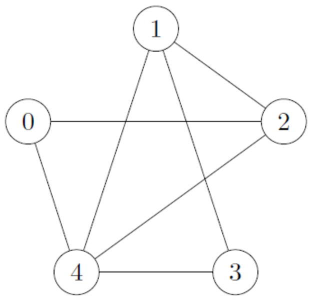
- $S = [\![0, n-1]\!]$ les sommets du graphe ;
- pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ avec $u \neq v$, une variable de Bernoulli $T_{u,v}$ (ou $T_{v,u}$) de paramètre p. Les variables $T_{u,v}$, pour $\{u, v\}$ décrivant les paires de sommets avec $u \neq v$, sont supposées indépendantes. Les arêtes d'un graphe G ainsi généré sont les paires $\{u, v\}$ telles que $T_{u,v} = 1$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des *triplettes* de sommets, c'est-à-dire l'ensemble des parties $\{u, v, w\}$ à trois éléments (distincts) de l'ensemble des sommets. On note r le nombre d'éléments de $\mathcal{T}$ et on pose

$$\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_r\}.$$

Étant donné $t = \{u, v, w\}$ une triplette (un élément de $\mathcal{T}$), on dit que t est un *triangle* de G si $\{u, v\}, \{v, w\}$ et $\{w, u\}$ sont des arêtes de G. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire de Bernoulli associée à l'évènement " t_k est un triangle de G" et Z_n la variable aléatoire égale au nombre de triangles de G.

Par exemple si $n = 5$ et le graphe de G est représenté comme ci-contre, alors $Z_5 = 3$ car il y a 3 triangles, qui sont $\{0, 2, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$ et $\{1, 3, 4\}$.



1. Quelle est la valeur de r en fonction de n ?
2. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Déterminer la loi de Y_k.
3. Exprimer Z_n en fonction des Y_k et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(Z_n)$.

On s'intéresse désormais à la variance de Z_n.

- On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$ tels que les triplettes t_i et t_j ont exactement deux sommets en commun (comme par exemple les triplettes $\{0, 1, 4\}$ et $\{0, 2, 4\}$). On désigne par a_n le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$.
- On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$ tels que $i \neq j$ et $(i, j) \notin \mathcal{E}$.

4. Calculer a_n.
5. (a) Montrer :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \sum_{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

(b) Montrer que, si $(i,j) \in \mathcal{F}$, alors Y_i et Y_j sont indépendantes.

(c) En déduire :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$$

(d) Conclure sur la valeur de $\mathbb{V}(Z_n)$.

Partie C :

Cette partie doit être rédigée sur une copie séparée précisant nom, classe et partie traitée.

Exercice 5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois propriétés (P_1), (P_2) et (P_3) suivantes sont satisfaites :

$$A \text{ et } \widetilde{A} \text{ commutent : } A\widetilde{A} = \widetilde{A}A \qquad (P_1)$$
$$A = A\widetilde{A}A \qquad (P_2)$$
$$\widetilde{A} = \widetilde{A}A\widetilde{A} \qquad (P_3)$$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

1. Montrer que si A est inversible, elle admet un pseudo-inverse unique, que l'on précisera.
2. On suppose dans cette question que A admet un pseudo-inverse $\tilde{A}$. On note $\tilde{a}$ l'endomorphisme canoniquement associé à $\tilde{A}$.
   (a) Traduire les propriétés (P_1), (P_2) et (P_3) sur a et $\tilde{a}$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Im}(a) = \operatorname{Im}(a^2)$ et en déduire $\operatorname{rg}(a) = \operatorname{rg}(a^2)$.

Inversement, on suppose désormais que $\operatorname{rg}(a) = \operatorname{rg}(a^2)$. On note r cet entier, et $q = n - r$. L'objectif est de montrer que A admet un pseudo-inverse.

3. Montrer $\ker(a) = \ker(a^2)$ et en déduire :

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(a) \oplus \operatorname{Ker}(a).$$

4. En déduire, à l'aide d'une base adaptée, qu'il existe $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, et $W \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = W \begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1}. \qquad (0_{i,j} \text{ désigne ici la matrice nulle de taille } i \times j)$$

5. Montrer que B est inversible.

On admet (il s'agit d'une simple vérification) que pour toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} M & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MN & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix}$$

6. Montrer que A admet au moins un pseudo-inverse.

Considérons un pseudo-inverse quelconque $\widetilde{A}$ de A et $\widetilde{a}$ l'endomorphisme canoniquement associé à $\widetilde{A}$.

7. Montrer $\operatorname{Ker}(a) = \operatorname{Ker}(\widetilde{a})$ et $\operatorname{Im}(a) = \operatorname{Im}(\widetilde{a})$.
8. Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que

$$\widetilde{A} = W \begin{pmatrix} D & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1}.$$

9. Montrer que $a \circ \widetilde{a}$ est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a et en déduire ce que vaut $W^{-1}A\widetilde{A}W$.
10. Montrer que A admet au plus un pseudo-inverse.

Correction du DS n 10

Exercice 1 On remarque que $F = (\mathrm{Vect}(1,-1,4))^{\perp}$, donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(1,-1,4)$ puisque l'on est en dimension finie.

Le ssev $F^{\perp}$ est engendré par le vecteur $(1,-1,4)$, une base orthonormée de $F^{\perp}$ est donc le vecteur normé $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,4)$.

Par l'expression du projeté dans une base orthogonale, on sait que l'image de $v = (-1,3,2)$ par la projection orthogonale sur $F^{\perp}$ est donnée par

$$p_{F^{\perp}}(v) = \frac{1}{18}\left\langle (1,-1,4) ; (-1,3,2) \right\rangle\ (1,-1,4) = \frac{2}{9}(1,-1,4)$$

La distance cherchée est donc

$$d(v,F) = ||p_{F^{\perp}}(v)|| = \frac{2\sqrt{18}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Exercice 2

1. ▶ Pour tous $f, g \in E$, on a bien $\langle f \mid g \rangle = \langle g \mid f \rangle$ (simple vérification) ; donc $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est symétrique.

▶ Montrons la linéarité par rapport à la première variable.
Soit $f_1, f_2, g \in E$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda f_1 + f_2 \mid g \rangle &= \int_0^1 \left[(\lambda f_1(t) + f_2(t))\, g(t) + (\lambda f_1'(t) + f_2'(t))\, g'(t) \right] \mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^1 \left(f_1(t)g(t) + f_1'(t)g'(t) \right) \mathrm{d}t + \int_0^1 \left(f_2(t)g(t) + f_2'(t)g'(t) \right) \mathrm{d}t \\
&= \lambda \langle f_1 \mid g \rangle + \langle f_2 \mid g \rangle
\end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bilinéaire.

▶ Soit $f \in E$. On a, pour tout $t \in [0;1]$, $f^2(t) + (f')^2(t) \geq 0$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\langle f \mid f \rangle = \int_0^1 \left(f^2(t) + (f'(t))^2 \right) \mathrm{d}t \geq 0$$

donc $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est positive.
Enfin, si $\langle f \mid f \rangle = 0$, on a

$$\int_0^1 \left(f^2(t) + (f'(t))^2 \right) \mathrm{d}t = 0$$

La fonction $t \mapsto f^2(t) + (f'(t))^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle, donc par théorème, pour tout $t \in [0;1]$, on en déduit que $f^2(t) + (f'(t))^2 = 0$.
Enfin, les deux termes de la somme étant positifs, ils s'annulent tous deux, et en particulier, on en déduit que pour tout $t \in [0;1]$, $f^2(t) = 0$, donc $f(t) = 0$.
Donc $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est définie positive.

Finalement, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. (a) Soit $f \in E$.

▶ On calcule :

$$\langle f \mid \varphi \rangle = \int_0^1 (f(t)\varphi(t) + f'(t)\varphi'(t))\,\mathrm{d}t$$

On a donc

$$\langle f \mid \varphi \rangle = \int_0^1 \left(f(t)e^t + f'(t)e^t\right)\mathrm{d}t = \left[f(t)e^t\right]_0^1 = ef(1) - f(0)$$

▶ De même,

$$\langle f \mid \psi \rangle = \int_0^1 \left(f(t)e^{-t} - f'(t)e^{-t}\right)\mathrm{d}t = \left[-f(t)e^{-t}\right]_0^1 = f(0) - \frac{1}{e}f(1)$$

▶ Enfin,

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle = \int_0^1 \left(e^t e^{-t} - e^t e^{-t}\right)\mathrm{d}t = 0$$

(b) On résout l'équation différentielle $f'' - f = 0$, dont l'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$, de solutions $r = 1$ et $r = -1$. On en déduit que

$$W = \{f \in E, f'' = f\} = \left\{x \mapsto Ae^x + Be^{-x} \mid A, B \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(\varphi, \psi)$$

La famille (φ, ψ), génératrice de W par définition, est constituée de deux vecteurs orthogonaux non nuls, donc elle est libre. Ainsi, (φ, ψ) est une base de W, et W est de dimension finie (égale à 2).
De plus,

$$\|\varphi\|^2 = 2\int_0^1 e^{2t}\mathrm{d}t = e^2 - 1, \ \text{ et } \ \|\psi\|^2 = 2\int_0^1 e^{-2t}\mathrm{d}t = -e^{-2} + 1$$

Donc une base orthonormée de W est $\left(\frac{\varphi}{\sqrt{e^2-1}}, \frac{\psi}{\sqrt{1-e^{-2}}}\right)$.

(c) (φ, ψ) constitue une base orthogonale de W. Par la formule de la projection orthogonale, on en déduit que :

$$p(f) = \frac{\langle f, \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2}\varphi + \frac{\langle f, \psi \rangle}{\|\psi\|^2}\psi$$

En utilisant la question 2a, on en déduit que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$p(f)(x) = \frac{ef(1) - f(0)}{(e^2 - 1)}e^x + \frac{f(0) - e^{-1}f(1)}{(1 - e^{-2})}e^{-x} = \frac{ef(1) - f(0)}{(e^2 - 1)}e^x + \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{(e^2 - 1)}e^{-x}$$

(d) On calcule $g(0)$ et $g(1)$. On obtient avec la formule précédente :

$$p(f)(1) = \frac{ef(1) - f(0)}{(e^2 - 1)}e + \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{(e^2 - 1)}e^{-1} = f(1)\frac{(e^2 - 1)}{(e^2 - 1)} = f(1)$$

Donc $g(1) = 0$. De même,

$$p(f)(0) = \frac{ef(1) - f(0)}{(e^2 - 1)} + \frac{e^2 f(0) - ef(1)}{(e^2 - 1)} = f(0)\frac{(e^2 - 1)}{(e^2 - 1)} = f(0)$$

Donc $g(0) = 0$.
Ainsi, on a bien $g(1) = 0 = g(0)$, donc $g \in V$.

3. La dimension de E n'est pas finie, donc on ne peut pas utiliser les dimensions.
On procède donc par double inclusion pour prouver $V = W^\perp$.

- ▶ Soit $f \in V$. Montrons $f \in W^\perp$. On a

$$\langle f \mid \varphi\rangle = ef(1) - f(0) = 0, \quad \text{et} \quad \langle f \mid \psi\rangle = f(0) - \frac{1}{e}f(1) = 0$$

  On déduit que f est orthogonal à toute combinaison linéaire de φ et de ψ par bilinéarité du produit scalaire, et donc à tout vecteur de W, puisque (φ, ψ) est une base de W. On a donc $f \in W^\perp$.
  On a montré $V \subset W^\perp$.
- ▶ Réciproquement, soit $f \in W^\perp$. Montrons que $f \in V$. Comme p est la projection sur W parallèlement à $W^\perp$, on a nécessairement $p(f) = 0$.
  Or, avec 2d, on sait que $g = f - p(f) \in V$. Donc ici $g = f \in V$.
  Ce travail montre que $W^\perp \subset V$.
- ▶ On conclut alors : $V = W^\perp$.

Exercice 3 1. On calcule $\det(A - \lambda I_3)$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 7 & -5-\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5-\lambda & 1 \\ 1 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{dév. par rapport à la première colonne} \\
&= (3-\lambda)(2-\lambda)(-4-\lambda)
\end{aligned}$$

On en déduit : $A - \lambda I_3$ est non inversible $\iff \det(A - \lambda I_3) \neq 0 \iff \lambda \in \{-4, 2, 3\}$.

2. D'après la question précédente, A est inversible puisque $0 \notin \{-4, 2, 3\}$.

Exercice 4 1. r est le nombre de parties à 3 éléments dans l'ensemble des sommets du graphe. Il y a n sommets donc

$$\boxed{r = \binom{n}{3}}.$$

2. $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$ donc Y_k suit une loi de Bernoulli.

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}\left((T_{u,v} = 1) \cap (T_{v,w} = 1) \cap (T_{w,u} = 1)\right)$$

Par hypothèse de l'énoncé, $T_{u,v}, T_{v,w}$ et $T_{w,u}$ sont des variables de Bernoulli indépendantes. Donc $\mathbb{P}(Y_k = 1) = P(T_{u,v} = 1)\,\mathbb{P}(T_{v,w} = 1)\,\mathbb{P}(T_{w,u} = 1) = p^3$.
Donc $\boxed{Y_k \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p^3.}$

3. Y_k vaut 1 si la partie à 3 éléments t_k de $\mathcal{T}$ est un triangle du graphe et 0 sinon.
$\mathcal{T}$ a r éléments, donc $Z_n = \sum_{k=1}^{r} Y_k$. Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{r} p^3 = \binom{n}{3}p^3.}$$

4. Soit $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$. On remarque que $(i, j) \in \mathcal{E}$ si et seulement si t_i et t_j ont exactement deux éléments communs mettons, c-à-d si et seulement si il existe $(u, v, w, y) \in [\![0, n-1]\!]^4$ tels que $t_i = \{u, v, w\}, t_j = \{u, v, y\}$ avec u, v, w, y distincts.
Voici donc une façon de choisir t_i et t_j :

- On choisit deux sommets $\{u, v\}$ de $[\![0, n-1]\!]$ qui seront communs : il y a $\binom{n}{2}$ possibilités.
- Puis on choisit w (le dernier sommet de t_i) parmi les $n-2$ sommets restants : $n-2$ possibilités.
- Puis on choisit y (le dernier sommet de t_j) parmi les $n-3$ sommets restants : $n-3$ possibilités.

Finalement

$$\boxed{a_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}.}$$

5. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_n) = \operatorname{Cov}(Z_n, Z_n) = \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i, \sum_{j=1}^{r} Y_j\right) & \\
= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Cov}\left(Y_i, \sum_{j=1}^{r} Y_j\right) & \quad \text{par linéarité de la covariance sur la première variable} \\
= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) & \quad \text{par linéarité de la covariance sur la deuxième variable} \\
= \boxed{\sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)} &
\end{aligned}$$

(b) Si $(i, j) \in \mathcal{F}$, Y_i et Y_j sont indépendantes. En effet, il y a deux possibilités :
- t_i et t_j n'ont aucun sommet commun et dans ce cas Y_i et Y_j sont indépendantes.
- t_i et t_j ont un sommet commun et un seul mettons u.
  On a alors $Y_i = T_{u,v}T_{v,w}T_{w,u}$ et $Y_j = T_{u,y}T_{y,z}T_{z,u}$ avec u, v, w, y, z distincts. Les variables T intervenants ici sont toutes distinctes et indépendantes donc Y_i et Y_j sont indépendantes (lemme des coalitions).

(c) Si $(i, j) \in \mathcal{F}$, alors Y_i et Y_j sont indépendantes et donc $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_n) &= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_i) + \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2, i\neq j} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) + \underbrace{\sum_{(i,j)\in\mathcal{F}} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)}_{=0} \\
&\boxed{= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)}
\end{aligned}$$

(d)
- $\forall i \in [\![1, r]\!]$, Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p^3 donc $\mathbb{V}(Y_i) = p^3(1-p^3)$ et

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) = rp^3(1-p^3).$$

- Soit $(i, j) \in \mathcal{E}$, $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(Y_iY_j) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j)$
  - $\mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j) = p^3p^3 = p^6$.

- t_i et t_j ont deux éléments en commun, mettons u et v.
  On a donc $Y_i = T_{u,v}T_{v,w}T_{w,u}$ et $Y_j = T_{u,v}T_{v,y}T_{y,u}$ avec u, v, w, y distincts.
  Comme $T_{u,v}T_{u,v} = T_{u,v}$ on a $Y_iY_j = T_{u,v}T_{v,w}T_{w,u}T_{v,y}T_{y,u}$.
  Les variables intervenant dans ce produit sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p, donc $\mathbb{E}(Y_iY_j) = p^5$.

Ainsi $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = p^5 - p^6$ et $\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = a_n(p^5 - p^6)$.

Finalement

$$\boxed{\mathbb{V}(Z_n) = rp^3(1-p^3) - a_n(p^5 - p^6)}$$

avec comme on l'a vu :

$$r = \binom{n}{3} \text{ et } a_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}.$$

Exercice 5 1. Soit A est inversible,

— $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

— $AA^{-1}A = I_nA = A$

— $A^{-1}AA^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1}$;

La matrice inverse de A vérifie les trois conditions (P_1), (P_2) et (P_3), donc A admet comme pseudo-inverse sa matrice inverse.

De plus si $\widetilde{A}$ est un pseudo-inverse de A, en multipliant (P_2) par A^{-1} à droite et à gauche on obtient $A^{-1} = \widetilde{A}$, d'où l'unicité du pseudo-inverse de A.

Certains ont invoqué l'unicité de l'inverse. On demande ici l'unicité d'un pseudo-inverse.

2. (a) La propriété (P_1) se traduit par $a \circ \tilde{a} = \tilde{a} \circ a$.
   La propriété (P_2) se traduit par $a = a \circ \tilde{a} \circ a$ et la propriété (P_3) se traduit par $\tilde{a} = \tilde{a} \circ a \circ \tilde{a}$.

   (b)
   - ◇ Comme a et $\tilde{a}$ commutent, on peut réécrire la deuxième égalité $a = a^2 \circ \tilde{a}$.
   - ◇ On sait que pour tout couple d'applications linéaires compatibles pour la composition, $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$. On a donc toujours $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$.
   - ◇ Ici, puisque $a = a^2 \circ \tilde{a}$, on a en plus $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(a^2 \circ \tilde{a}) \subset \mathrm{Im}(a^2)$.
   - ◇ Par double inclusion on a donc démontré que $\boxed{\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(a^2).}$
   - ◇ On en déduit l'égalité des dimensions : $\boxed{\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)}$.

3. ◇ L'inclusion $\ker(a) \subset \ker(a^2)$ est toujours vraie. Montrons qu'il y a égalité des dimensions en appliquant le théorème du rang à a et a^2 :

$$\dim\ker(a) = \dim\mathbb{R}^n - \mathrm{rg}(a) \underset{\text{hypothèse}}{=} \dim\mathbb{R}^n - \mathrm{rg}(a^2) = \dim\ker(a^2).$$

On a donc $\boxed{\ker(a) = \ker(a^2).}$

◇ Pour démontrer que $\mathrm{Im}(a)$ et $\ker(a)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, commençons par prouver qu'ils sont en somme directe.

Soit $x \in \mathrm{Im}(a) \cap \ker(a)$. Comme $x \in \mathrm{Im}(a)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a(y)$. Comme $x \in \ker(a)$, $0 = a(x) = a^2(y)$. Donc $y \in \ker(a^2) = \ker(a)$ d'après ce qui précède. On en déduit $x = a(y) = 0$.

On a ainsi montré que $\mathrm{Im}(a)$ et $\ker(a)$ sont en somme directe.

- $\diamond$ Le théorème du rang appliqué à a donne que $\dim\ker(a)+\dim\operatorname{Im}(a)=\dim\mathbb{R}^n$. Donc comme $\ker(a)$ et $\operatorname{Im}(a)$ sont en somme directe, on en déduit qu'ils sont <u>supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$</u>.

Beaucoup m'ont dit que la somme était directe car $\dim\ker(a)+\dim(\Im a)=\dim\mathbb{R}^n$ ce qui est évidemment très faux puisque le thm du rang est tout le temps vrai et que l'image et le noyau ne sont pas toujours en somme directe. On peut déduire que la somme est directe si $\Im(a)+\ker(a)=\mathbb{R}^n$ ce que l'on ne sait pas ici.

4. On choisit une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition en sous-espaces supplémentaires : $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n)$ avec $r=\operatorname{rg}(a)$, $(e_1,\dots,e_r)$ une base de $\operatorname{Im}(a)$ et $(e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de $\ker(a)$.

Dans cette base, l'application linéaire a s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q}\end{pmatrix}$ avec B une matrice de taille r, en notant $q=n-r$. En effet :

- $\diamond$ il n'y a que des zéros dans les $n-r$ colonnes de droite puisque chaque élément du noyau s'envoie sur 0.
- $\diamond$ il n'y a que des zéros dans les $n-r$ lignes du bas puisque les images de tous les vecteurs sont engendrées par les r premier vecteurs $(e_1,\dots,e_r)$ (qui forment une base de $\operatorname{Im}(a)$). On peut aussi dire que $\Im(a)$ est stable par a.

En notant W la matrice des coordonnées de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique, W est une matrice inversible de taille n, et on obtient alors par la formule de changement de base :

$$A=W\begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q}\end{pmatrix}W^{-1}.$$

Comme la forme de la matrice vous était donnée, il fallait justifier correctement sa forme ! Certains ont justifié la matrice nulle en dessous de B en me disant " car $\Im(a)=\Im(a^2)$. J'ai mis une bonne trentaine de copies à comprendre ce que vous vouliez dire (à savoir pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, $a(e_i)\in\Im(a^2)$ puisque $e_i\in\Im(a)$ et $\Im(a)=\Im(a^2)$ donc $a(e_i)\in\Im(a)$. C'est TRES compliqué pour justifier que $a(e_i)\in\Im(a)$ car un tel élément est CLAIREMENT un élément de l'image puisqu'il s'écrit $a(qqch)$

5. *Version A :* Deux matrices semblables ont même rang, donc

$$\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q}\end{pmatrix}\right).$$

Les r premières colonnes de $\begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q}\end{pmatrix}$ forment donc une famille libre. Comme leurs dernières coordonnées sont nulles, on en déduit que les colonnes de B forment également une famille libre. Comme B est de taille r qui correspond au rang de a, B est une matrice <u>inversible</u>.

Version B : on peut restreindre a à son image au départ et à l'arrivée. Notons b l'endomorphisme induit :

$$b:\begin{cases}\operatorname{Im}(a)\to\operatorname{Im}(a)\\ x\mapsto a(x).\end{cases}$$

La matrice B est alors la matrice représentative de b dans la base $(e_1,\dots,e_r)$ de $\operatorname{Im}(a)$ introduite dans la question précédente. Or $\ker(b)=\operatorname{Im}(a)\cap\ker(a)=\{0\}$ donc l'endomorphisme b est bijectif, puisqu'injectif en dimension finie. On en déduit que sa matrice représentative <u>B est inversible</u>.

Version C : On peut aussi remarquer qu'il suffit de montrer que la famille $(a(e_1),\dots,a(e_r))$ est libre ce qui se fait assez bien.

Là encore, le résultat était donné donc vous ne pouvez pas vous permettre d'aller trop vite et de ne pas donner tous les arguments avec précision.

6. On définit $\widetilde{A} = W \begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1}$.

Vérifions que $\widetilde{A}$ est un pseudo-inverse de A :

◇ (P_1) :

$$\begin{aligned} A\widetilde{A} &= W \begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} \underbrace{W^{-1}W}_{=I_n} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1} \\ &= W \begin{pmatrix} BB^{-1} & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1} && B \text{ et } B^{-1} \text{ commutent !} \\ &= W \begin{pmatrix} B^{-1}B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1} = \cdots = \widetilde{A}A. \end{aligned}$$

◇ (P_2) :

$$\begin{aligned} A\widetilde{A}A &= W \begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} \underbrace{W^{-1}W}_{=I_n} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} \underbrace{W^{-1}W}_{=I_n} \begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1} \\ &= W \begin{pmatrix} BB^{-1}B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1} = W \begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1} = A \end{aligned}$$

et de même pour (P_3).

$\widetilde{A}$ est donc un pseudo-inverse pour A.

7. Rappelons les relations vérifiées par a et $\tilde{a}$:

$$a \circ \tilde{a} = \tilde{a} \circ a, \quad a = a \circ \tilde{a} \circ a \quad \text{et} \quad \tilde{a} = \tilde{a} \circ a \circ \tilde{a}.$$

◇ Comme a et $\tilde{a}$ commutent, on peut réécrire la deuxième égalité $a = \tilde{a} \circ a^2$ et la troisième $\tilde{a} = a \circ \tilde{a}^2$. Alors :

(⋆) $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(\tilde{a} \circ a^2) \subset \mathrm{Im}(\tilde{a})$.

(⋆) $\mathrm{Im}(\tilde{a}) = \mathrm{Im}(a \circ \tilde{a}^2) \subset \mathrm{Im}(a)$.

Par double inclusion on en déduit $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(\tilde{a})$.

◇ On a aussi $a = a^2 \circ \tilde{a}$ et $\tilde{a} = \tilde{a}^2 \circ a$, d'où :

(⋆) $\ker(\tilde{a}) \subset \ker(a^2 \circ \tilde{a}) = \ker(a)$

(⋆) $\ker(a) \subset \ker(\tilde{a}^2 \circ a) = \ker(\tilde{a})$

Par double inclusion on obtient $\ker(a) = \ker(a^2)$. On peut aussi conclure avec l'égalité des dimensions qui découle du thm du rang appliqué à a et $\tilde{a}$.

Remarque : comme A est aussi un pseudo-inverse de $\widetilde{A}$, on peut se contenter de montrer une seule inclusion pour chaque cas et conclure par symétrie.

8. Comme $\widetilde{A}$ admet un pseudo-inverse (la matrice A), on peut lui appliquer ce qu'on a fait à A : la base $\mathcal{B}$, adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a) = \mathbb{R}^n$, est encore adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}(\tilde{a}) \oplus \ker(\tilde{a}) = \mathbb{R}^n$ puisqu'on vient de montrer que ces ensembles sont les mêmes. On a donc montré qu'il existe une matrice D de taille r (on sait d'ailleurs qu'elle est inversible de surcroît) telle que

$$\boxed{\widetilde{A} = W \begin{pmatrix} D & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1}}$$

avec W la matrice de passage introduite précédemment.

Certains se sont contentés de me dire " par un travail similaire". Il est impératif que vous disiez que l'on peut prendre la même base (donc c'est la même matrice W) !

9. ◇ On calcule : $(a\circ\tilde{a})^2 = a\circ\tilde{a}\circ a\circ\tilde{a} = a\circ\tilde{a}$ en utilisant (P_2) ou (P_3). Donc $a \circ \tilde{a}$ est un projecteur.

◇ Montrons que $\ker(a \circ \tilde{a}) = \ker(\tilde{a})$.

($\star$) L'inclusion $\ker(a \circ \tilde{a}) \subset \ker(\tilde{a})$ est immédiate.

($\star$) Soit $x \in \ker(a \circ \tilde{a})$, ce qui signifie $\tilde{a}(x) \in \ker(a)$.
Alors $\tilde{a}(x) \in \mathrm{Im}(\tilde{a}) \cap \ker(a) = \mathrm{Im}(a) \cap \ker(a) = \{0\}$ puisque ces espaces sont en somme directe, donc $\tilde{a}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(\tilde{a})$.

($\star$) On a donc montré l'égalité $\ker(a \circ \tilde{a}) = \ker(\tilde{a}) = \ker(a)$.

Certains m'ont écrit $(a \circ \tilde{a})^2 = a \circ \tilde{a} \circ a \circ \tilde{a} = a \circ \tilde{a}$ donc c'est un projecteur. ce qui revient à dire " $a \circ \tilde{a}$ vérifie la définition de projecteur (sans aucune justification) donc c'est un projecteur (ce qui est ce que vous devez montrer). Si vous étiez filou et que vous n'aviez aucune idée de pourquoi c'est un projecteur mais que vous vous souvenez que f est un projecteur si $f \circ f = f$, qu'est-ce que vous écririez de différent ? vous voyez pourquoi c'est un problème de ne pas faire apparaître un argument ?

◇ Montrons que $\mathrm{Im}(a \circ \tilde{a}) = \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(\tilde{a})$.

($\star$) On a une inclusion immédiate $\mathrm{Im}(a \circ \tilde{a}) \subset \mathrm{Im}(a)$.

($\star$) Comme les applications $a \circ \tilde{a}$ et a ont même noyau et mêmes espaces de départ et d'arrivée, en utilisant le théorème du rang comme dans la question 2., on obtient l'égalité des dimensions.

($\star$) Ceci prouve que $\mathrm{Im}(a \circ \tilde{a}) = \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(\tilde{a})$.

◇ Comme $a \circ \tilde{a}$ est un projecteur ayant $\ker(a)$ pour noyau et $\mathrm{Im}(a)$ pour image, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a) = \mathbb{R}^n$ est la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix}$.

En utilisant la formule de changement de bases on obtient donc $A\widetilde{A} = WJ_rW^{-1}$, ou autrement dit :

$$\boxed{W^{-1}A\widetilde{A}W = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix}.}$$

10. On va montrer que $D = B^{-1}$ pour démontrer l'unicité de $\widetilde{A}$. En remplaçant A et $\widetilde{A}$ par leurs expressions déterminées plus haut on obtient :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} &\underset{9.}{=} W^{-1}A\widetilde{A}W \\
&\underset{4.,8.}{=} \underbrace{W^{-1}W}_{=I_n} \begin{pmatrix} B & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} \underbrace{W^{-1}W}_{=I_n} \begin{pmatrix} D & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} \underbrace{W^{-1}W}_{=I_n} \\
&= \begin{pmatrix} BD & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En identifiant les blocs en haut à gauche de ces matrices on obtient donc $BD = I_r$. Comme il s'agit de deux matrices carrées de taille r, ceci impose que $D = B^{-1}$ donc la matrice $\widetilde{A}$ est entièrement déterminée par A :

$$\boxed{\widetilde{A} = W \begin{pmatrix} B^{-1} & 0_{r,q} \\ 0_{q,r} & 0_{q,q} \end{pmatrix} W^{-1}.}$$

On a montré au final que A admet un pseudo-inverse si et seulement si $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$, et dans ce cas, le pseudo-inverse de A est unique.