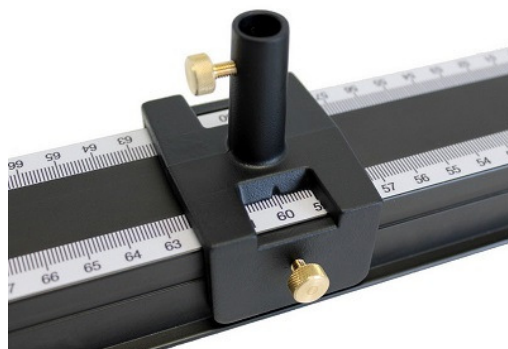
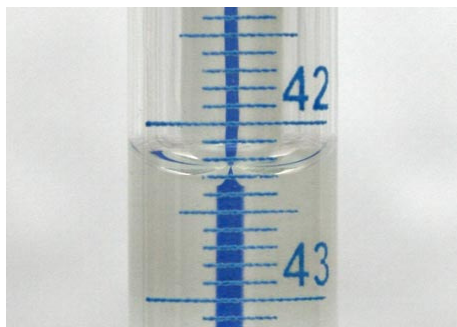


Estimation des incertitudes de mesure en Physique et en Chimie

Introduction

« Il n'y a de science que du mesurable ». Cette affirmation attribuée à Lord Kelvin indique que mesurer des grandeurs est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche scientifique et dans l'industrie. C'est aussi fondamental dans de nombreuses activités quotidiennes : opération de pesée dans le commerce, analyses médicales, mesure de vitesse à l'aide d'un radar, etc...

Il apparaît nécessaire d'estimer la confiance que l'on attribue aux résultats fournis suite à ces opérations.



Mesurer une grandeur (appelée aussi **mesurande**) (ex : masse, tension électrique, volume, longueur, température...) ne se résume pas à lui attribuer une valeur numérique : "la masse des cerises est 113 g". Il faut lui associer une **incertitude** afin de qualifier la qualité de la mesure : cela consiste à donner un **intervalle** dans lequel on estime que se trouve, avec un **niveau de confiance donné**, la valeur vraie du mesurande, exemple : "la masse des cerises est $(113 \pm 1)\text{g}$ ".

Attention : cet intervalle n'est en aucun cas l'écart à une valeur attendue, prédite par un modèle, tabulée ou à une prétendue « valeur théorique » ! En effet, il suffit de se mettre à la place de celui qui mesure une grandeur pour la première fois tel Cassini déterminant la distance Terre-Soleil en 1672 : où irait-il chercher la valeur attendue ?

Préciser l'incertitude sur une mesure est indispensable. A défaut, la mesure est inexploitable en vue de valider ou d'infirmer une théorie ou de faire de nouvelles découvertes.

Sommaire

Extrait du programme officiel pour la filière PCSI	page 3
1) Vocabulaire et notation de la métrologie	page 4
2) Evaluation de type A de l'incertitude-type	page 7
3) Evaluation de type B de l'incertitude-type	page 10
4) Règles d'écriture d'un résultat scientifique	page 13
5) Comparaison de deux valeurs - Ecart normalisé ou "z-score"	page 14
6) Variabilité d'une grandeur composée - Propagation des incertitudes-type	page 15

Extrait du programme officiel pour la filière PC

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

1) Vocabulaire et notations de la métrologie

On appelle **mesurage** l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une valeur que l'on peut raisonnablement attribuer à un **mesurande**. Le mesurage de la position x d'une lentille lors de la formation d'une image par exemple s'effectue à l'aide d'un banc optique gradué. La **valeur vraie** (notée x_{vraie}) du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. On appelle **grandeur d'influence** une grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage (pression, température...).

1.1) Erreurs systématique et aléatoire

L'**erreur de mesure** est l'écart entre une mesure quelconque x_i et la valeur vraie : $e_i = x_i - x_{\text{vraie}}$. La valeur vraie étant, par nature, inaccessible, on remarquera que l'erreur commise lors d'une mesure l'est également. Les erreurs sont dues aux imperfections des instruments de mesure, à l'expérimentateur, au protocole expérimental employé, à la variabilité des grandeurs d'influence. On verra plus loin que l'on se sert de l'erreur et de ses propriétés statistiques *à priori* pour obtenir un encadrement de la valeur du mesurande.

On considère traditionnellement qu'une erreur de mesure possède deux composantes :

- **composante aléatoire de l'erreur** : elle est due à des variations temporelles et spatiales imprévisibles de grandeurs d'influence. Les effets de telles variations, appelés effets aléatoires, entraîne une dispersion des valeurs obtenues lors de mesures répétées du mesurande même si celles-ci sont effectuées dans les mêmes conditions expérimentales. Les conditions de répétabilité sont remplies lorsque le même opérateur ou le même programme effectue n mesures en suivant rigoureusement le même protocole. Le résultat du processus de mesurage peut mathématiquement être modélisé par une variable aléatoire X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ . Ces deux grandeurs sont inaccessibles à l'expérimentateur car il devrait en théorie réaliser une infinité de mesures pour les obtenir. Néanmoins, les mathématiques peuvent fournir de bons estimateurs de ces quantités à partir d'un nombre n fini de mesures.

Une mesure x_i parmi les n est en général différente de μ . On appelle erreur aléatoire la différence : $x_i - \mu$. Lors de chaque mesure, l'erreur aléatoire peut prendre n'importe quelle valeur positive ou négative. Elle est de valeur moyenne nulle.

Il n'est pas possible d'éliminer l'erreur aléatoire, mais en augmentant le nombre de mesures, on peut, par traitement statistique, réduire ses effets sur l'incertitude de mesure.

- **composante systématique de l'erreur** : elle correspond à la différence : $\mu - x_{\text{vraie}}$

Comme son nom l'indique, elle correspond à la situation où le résultat d'une mesure est systématiquement décalé par rapport à la valeur vraie, toujours dans le même sens et toujours de la même quantité (inconnue) ce qui la distingue d'une erreur aléatoire. Elle peut être due :

- à un **mauvais étalonnage** (décalage du zéro, oubli de la tare sur une balance...) ou au **vieillissement** de l'appareil de mesure.
- à l'**oubli de l'influence d'un paramètre extérieur** (non prise en compte du coefficient de dilatation sur un pied à coulisse utilisé en dehors de la gamme de température préconisée par exemple)
- à une **procédure erronée** et trouver son origine dans la perturbation induite par la présence même de l'instrument de mesure (non prise en compte de la résistance interne de l'ampèremètre dans un montage longue dérivation par exemple)

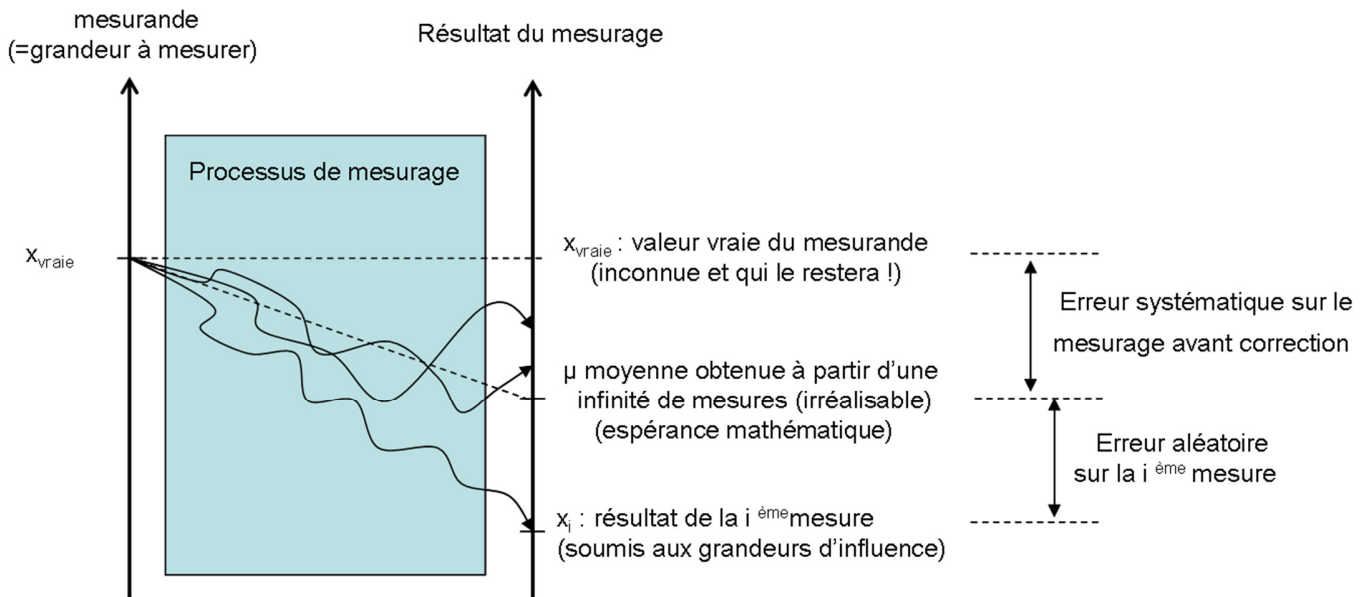
Si elle est décelée (ce qui n'est en général pas simple...) elle peut être éliminée par l'application d'une correction même après la campagne de mesures.

En pratique, différentes méthodes peuvent être employées pour détecter et quantifier ce type d'erreur :

- mesurer la même grandeur avec des instruments différents ;
- mesurer une grandeur étalon (contrôle de la justesse) ;
- analyser avec soin le protocole de mesure employé.

L'erreur systématique ne peut pas être réduite en augmentant le nombre de mesures, mais peut être éliminée par l'application d'une correction.

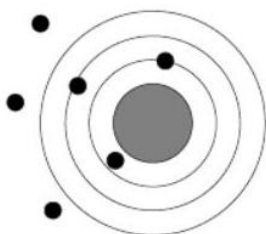
Comme on peut le voir sur le résumé ci-dessous, l'erreur de mesure (non représentée) est la somme algébrique de l'erreur aléatoire et de l'erreur systématique : $e_i = (x_i - \mu) + (\mu - x_{\text{vraie}})$



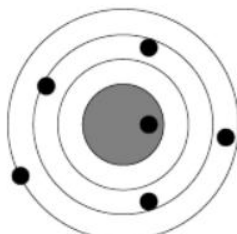
1.2) Fidélité, justesse et précision

La **fidélité** d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des indications très voisines les unes des autres lors de mesures répétées dans les mêmes conditions : les erreurs aléatoires sont alors faibles. La **justesse** d'un instrument de mesure est son aptitude à fournir une indication exempte d'erreur systématique. Pour un appareil numérique (oscilloscope, multimètre, thermomètre, balance...), cette propriété ne peut être assurée que par son étalonnage régulier. Un instrument à la fois juste et fidèle est dit « **précis** ».

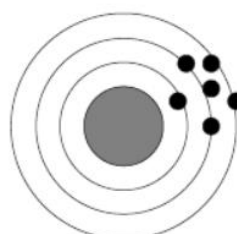
On peut illustrer ces notions par une analogie avec des tirs sur cible :



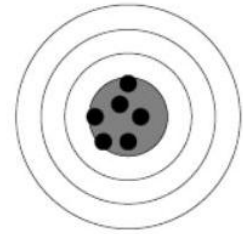
Ni juste ni fidèle :
valeurs dispersées et décentrées.
Erreurs
aléatoires et systématiques.



Juste mais pas fidèle :
l'arc est bien réglé mais le tireur
est débutant.
Erreurs aléatoires.



Fidèle mais pas juste :
le tireur est expérimenté mais l'arc
est déréglé.
Erreurs systématiques.



Fidèle et juste :
Erreurs faibles

Cette analogie est trompeuse car, lors d'un mesurage, la cible est inconnue : la dispersion renseigne sur l'importance des erreurs aléatoires mais la présence d'erreur systématique ne peut pas être décelée par une répétition des mesures.

On n'envisage dans la suite de ce document que le traitement des erreurs aléatoires. Il sera donc supposé que les mesures sont exemptes d'erreur systématique ou que la correction nécessaire a déjà été apportée.

1.3) Qu'entend-t-on par incertitude de mesure ?

"Incertitude" signifie doute : elle reflète l'impossibilité de connaître avec exactitude la valeur vraie de la grandeur mesurée. **Savoir qu'une mesure physique, aussi précise soit-elle, comporte toujours une part d'incertitude constitue incontestablement un pilier de la culture scientifique.**

Les termes « erreur » et « incertitude » représentent des concepts différents et ne doivent pas être confondus.

L'incertitude de mesure est un paramètre positif qui **caractérise la dispersion des valeurs** qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande. C'est une **estimation** de l'« étendue » des valeurs dans laquelle se situe avec un certain **niveau de confiance** la valeur vraie de la grandeur mesurée.

Comme déjà dit, le résultat d'un processus de mesurage peut être modélisé par une **variable aléatoire** X et l'on cherche à caractériser la dispersion des valeurs que peut prendre cette variable aléatoire. Une caractérisation de cette dispersion peut être obtenue à partir de **l'écart-type** σ de cette variable aléatoire.

On appelle « incertitude-type » et on note u (u pour "uncertainty") une incertitude exprimée sous la forme d'un écart-type.

Un résultat expérimental sera donné sous la forme : $x = (x \pm u(x)) \text{ unité}$ où $u(x)$ est l'incertitude-type.

Cela signifie alors que, en l'absence d'erreur systématique, la valeur vraie du mesurande se situe dans l'intervalle $[x - u(x) ; x + u(x)]$ avec un niveau de confiance qu'il faudra préciser.

On définit l'incertitude-type relative $\frac{u(x)}{|x|}$ (en %) qui est un bon indicateur pour juger de la qualité de la mesure.

Une part importante du travail expérimental réside dans l'estimation de l'incertitude-type $u(x)$.

Si l'on effectue un grand nombre de mesures, cette incertitude-type peut être évaluée par des moyens statistiques. Cependant, comme cela est assez rarement le cas en pratique, l'incertitude-type est le plus souvent évaluée par l'utilisation d'un modèle probabiliste décrivant le comportement de l'erreur.

On parle ainsi d'évaluation :

- de **type A** de l'incertitude-type si elle est estimée par **l'étude statistique** d'une série de mesure.
Elle n'est possible que si la méthode de mesure est assez sensible pour faire apparaître une dispersion des résultats et si l'on est prêt à y consacrer le temps nécessaire (rare en TP mais fort bien vu en TIPE...)
- de **type B** de l'incertitude-type si elle est estimée à partir d'une mesure unique et d'un **modèle probabiliste**.

2) Evaluation de type A de l'incertitude

2.1) Rappels mathématiques sur les variables aléatoires et la distribution gaussienne

Une variable aléatoire X continue est caractérisée par sa **fonction densité de probabilité** $f(x)$, fonction à valeurs positives telle que $\int_a^b f(x)dx$ représente la probabilité de l'événement : $X \in [a; b]$.

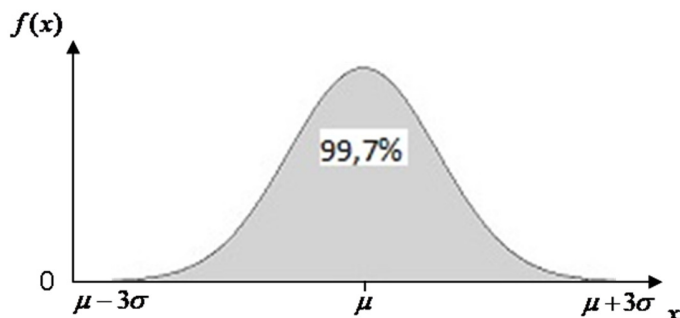
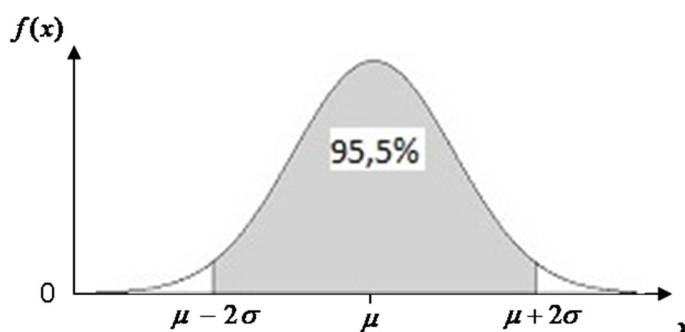
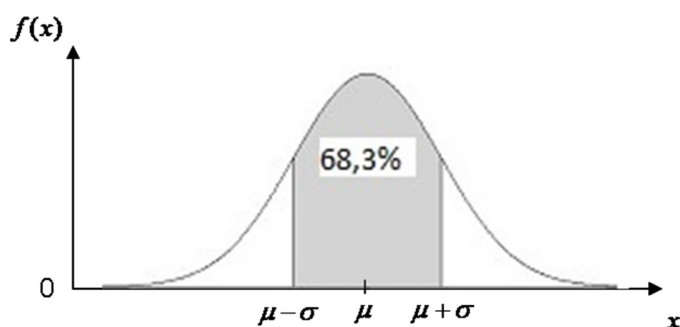
Elle vérifie la **condition de normalisation** : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

L'**espérance mathématique** de X est définie par : $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

L'**écart-type** de X est la racine carrée de sa variance : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx}$

Lors d'une série de mesures, un cas souvent rencontré est celui d'une distribution gaussienne dont la fonction densité de probabilité est : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Rappelons les propriétés géométriques de cette distribution :



L'écart-type σ permet de caractériser la dispersion des valeurs : on constate qu'environ 68% de l'aire totale sous la courbe est comprise entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$: la probabilité de l'évènement : $X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ est d'environ 68%.

De la même façon, la probabilité de l'évènement $X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ est d'environ 95%.

Enfin, l'intervalle $[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$ recouvre l'essentiel des valeurs possibles...

2.2) Estimation des caractéristiques μ et σ

En pratique, lors d'une série de n mesures $\{x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_n\}$, les caractéristiques μ et σ de la distribution ne peuvent être connus : il faudrait pour cela que n soit infini. Heureusement, on sait en statistique en donner de bons estimateurs à partir d'un échantillon de taille finie.

Le meilleur estimateur de l'espérance mathématique (qui est confondue avec la valeur vraie en l'absence d'erreur systématique, les mesures sont "justes") est donné par la moyenne arithmétique des x_i , soit : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Le meilleur estimateur (sans biais) de l'écart-type est : $s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

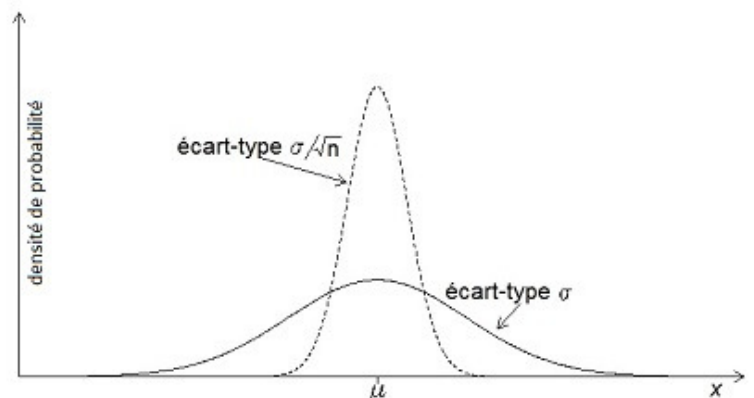
2.3) Distribution des valeurs moyennes et incertitude-type

Imaginons ici que l'on répète un grand nombre de fois l'expérience consistant à mesurer n valeurs de X puis à en prendre la valeur moyenne $\bar{x}$. Dans une telle procédure, qu'en pratique on ne mettra jamais en oeuvre, $\bar{x}$ apparaîtrait comme une nouvelle variable aléatoire. Il n'y a en effet aucune raison de trouver à chaque fois la même moyenne !

Le **théorème central limite** (TCL) montre que quelle que soit la forme de la distribution (gaussienne ou non) de la variable aléatoire X (distribution des mesures uniques), **la distribution des $\bar{x}$ tend vers une gaussienne** dont l'espérance mathématique est la même que celle de X et dont l'écart-type est donné par : $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ceci confirme l'idée "pragmatique" selon laquelle l'estimation d'une grandeur par une moyenne sur n mesures est meilleure qu'avec une mesure unique. Elle est $\sqrt{n}$ fois plus précise. Malheureusement, $\sqrt{n}$ croît lentement et améliorer la précision d'un facteur 10 nécessite d'effectuer 100 fois plus de mesures !

Lorsqu'on effectue une mesure unique, la valeur trouvée suit la distribution de probabilité représentée en trait plein. n mesures indépendantes se répartissent aléatoirement selon cette courbe. Lorsqu'on prend la valeur moyenne de ces n mesures, les écarts à la valeur vraie se compensent statistiquement, avec d'autant plus d'efficacité que n est grand. Si on réalisait plusieurs déterminations de la moyenne de n mesures, elles se répartiraient aléatoirement selon la courbe en pointillés.



L'**incertitude-type** $u(x)$ sur la détermination de x obtenue à partir d'une série de n mesures est définie comme étant

l'estimateur de l'écart-type sur la valeur moyenne. On écrira donc : $u(x) = s_{n-1} / \sqrt{n} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

2.4) niveau de confiance

L'intention de départ est de fournir, à l'issue de la mesure, un intervalle (de demi-largeur $u(x)$) dont on puisse s'attendre à ce qu'il contienne une fraction donnée de la distribution des valeurs pouvant être attribuées au mesurande.

Or les paragraphes précédents indiquent que l'intervalle $[\bar{x} - u(x); \bar{x} + u(x)]$ couvre environ 68% de ces valeurs. 32% peuvent donc être en dehors !

2.5) un exemple pour comprendre

Un étudiant (très courageux !) réalise 14 mesures indépendantes de la longueur d'onde de la raie verte du mercure en procédant à chaque fois rigoureusement de la même manière (conditions de répétabilité).

Les résultats qu'il obtient n'en sont pas moins répartis de façon aléatoire. Il les consigne dans un tableau.

$\lambda(nm)$	538,2	554,3	545,7	552,3	566,4	537,9	549,2	540,3	548,2	554,9	555,7	539,3	541,4	546,8
---------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Remarque : rappelons qu'une éventuelle erreur systématique induite par le matériel utilisé ou la façon de procéder propre à cet élève ne peut pas ici être mise en évidence. Il faudrait pour cela changer à chaque fois de matériel et d'expérimentateur.

La composante systématique de l'erreur deviendrait alors aléatoire et serait prise en compte dans le traitement statistique.

Avec le menu statistique de sa calculatrice, il obtient les estimateurs de l'espérance mathématique et de l'écart-type :

$$\bar{\lambda} = 547,90 \text{ nm et } s_{n-1} = 8,27 \text{ nm}$$

Remarque : Il faut savoir utiliser EXCEL / PYTHON ou sa calculatrice pour obtenir rapidement ces estimateurs :

TI : " $\bar{x}$ " et " Sx " (dans le doute, prendre la plus grande des valeurs proposées car la plus petite correspond à s_n où le $n-1$ au dénominateur est remplacé par n mais cet estimateur présente un biais). CASIO : à vous de voir (notice, réflexion..)

Remarque : s_{n-1} est improprement appelé "écart-type" alors que ce n'est que le meilleur estimateur possible de σ à partir d'un n -échantillon. Pour lever cette ambiguïté, on le nomme parfois "écart-type expérimental".

Il tient compte du fait qu'il a réalisé $n=14$ mesures et souhaite, à juste titre, en être récompensé :

L'incertitude-type s'écrit donc : $u(\lambda) = \frac{s}{\sqrt{14}} = 2,21 \text{ nm}$

Il conclut alors : $\lambda = (547,9 \pm 2,2) \text{ nm}$ avec un niveau de confiance de 68% (voir §4 pour les règles d'écritures).

Remarque : ce travail peut être mené à l'aide du langage de programmation PYTHON :

```
import numpy as np
Lambda = [538.2,554.3,545.7,552.3,566.4,537.9,549.2,540.3,548.2,554.9,555.7,539.3,541.4,546.8]
print("Moyenne = {:.2f} nm".format(np.mean(Lambda)))
print("Ecart-type = {:.2f} nm".format(np.std(Lambda,ddof=1)))
n=len(Lambda)
print("Incrtitude-type sur la moyenne = {:.2f} nm".format(np.std(Lambda,ddof=1)/np.sqrt(n)))
```

Ces quelques lignes permettent d'afficher les résultats suivants :

```
Moyenne = 547.90 nm
Ecart-type = 8.27 nm
Incrtitude-type sur la valeur moyenne = 2.21 nm
```

3) Evaluation de type B de l'incertitude

En travaux pratiques, une étude statistique est le plus souvent difficile à mettre en place (manque de temps essentiellement, difficulté à reproduire la mesure dans des conditions de répétabilité suffisamment bien contrôlées, utilisation d'instruments trop peu sensibles pour faire apparaître la variabilité de la mesure). Il faut donc disposer de méthodes pour estimer l'incertitude **à partir d'une seule mesure**. Il faut pour cela **exploiter les caractéristiques de l'instrument** utilisé et **observer attentivement** le dispositif expérimental **en faisant preuve de bon sens**. Il convient également **d'utiliser toutes les informations** mises à disposition (notices d'appareil typiquement qu'elles soient sous forme "papier" ou "en ligne" ...).

On s'appuie alors sur une **loi de distribution supposée** de la variable aléatoire X modélisant le résultat du processus de mesurage. Plusieurs lois sont possibles : rectangulaire, triangulaire, trapézoïdale, gaussienne, etc...

3.1) Distributions rectangulaire (loi uniforme) et triangulaire

Ces distributions sont adaptées à la situation fréquente où l'on est certain, à l'issue du processus de mesurage et en l'absence d'erreur systématique, que la valeur vraie du mesurande est comprise entre deux bornes a et b .

On note $2d = b - a$ l'étendue des valeurs possibles.

On envisage dans le cas rectangulaire (loi uniforme) que toutes ces valeurs sont équiprobables.

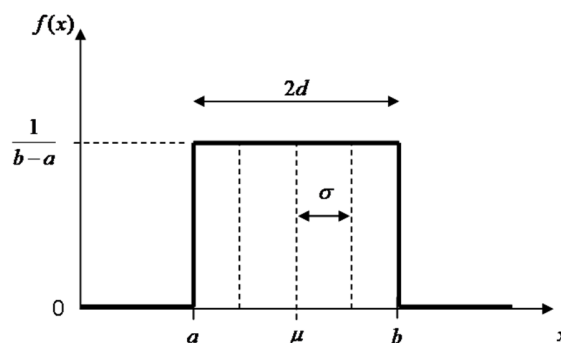
Afin de satisfaire à la condition de normalisation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, la fonction densité de probabilité est :

$f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a < x < b$. La valeur de cette fonction chute brutalement à 0 en dehors de cette intervalle.

L'espérance mathématique et l'écart-type de X sont faciles à établir à partir de leur définition :

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \dots = \frac{a+b}{2}$$

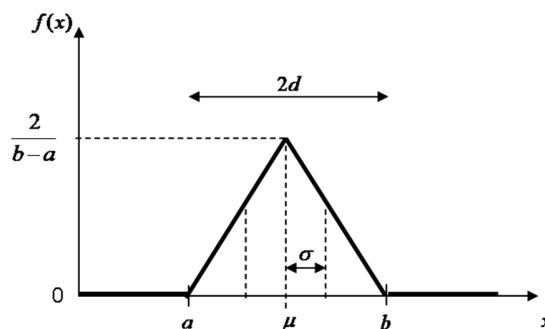
$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx} = \dots = \frac{d}{\sqrt{3}}$$



On constate géométriquement (étude de surfaces) que 58% des valeurs sont comprises entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$ (contre 68% pour une gaussienne). La loi uniforme est la loi de distribution à support borné d'entropie maximale : aucune information ne permet de privilégier une valeur plutôt qu'une autre dans l'intervalle $[a ; b]$

Remarque : Dans le cas triangulaire (entropie plus faible car on privilégie les valeurs centrales) l'espérance mathématique est la même mais l'écart-type est plus faible : $\sigma = \frac{d}{\sqrt{6}}$

L'étude des surfaces (moins évidente) montre que 65% des valeurs sont comprises entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.



La distribution triangulaire correspondrait ainsi à une estimation "moins pessimiste" de l'incertitude. Cependant, au niveau CPGE, on se limite à l'utilisation de la distribution rectangulaire.

3.2) Mesure effectuée par "tâtonnement"

Considérons l'exemple simple de la pesée des cerises à l'aide d'une balance Roberval. La photographie de la page 1 indique que lorsqu'une masse de 112 g est disposée dans le plateau de gauche, la balance penche à droite du côté des cerises. Les plus petites masses marquées dont on dispose sont de 2 g. L'ajout d'une seule d'entre elles suffit à faire pencher la balance du côté des masses.

On interprète ainsi cette expérience à l'aide de la loi uniforme : la masse m des cerises est à coup sûr comprise entre 112 et 114 g. On retient donc $m = 113$ g. L'étendue des valeurs possibles supposées équiprobables est de $2d = 2$ g.

On en déduit l'incertitude-type : $u(m) = \sigma = \frac{d}{\sqrt{3}} = 0,58$ g

Cette situation où l'incertitude de mesure est dominée par la difficulté que l'on éprouve à repérer une configuration spécifique (équilibrage parfait de la balance) se rencontre fréquemment en TP de physique. On peut citer par exemple : la mise en oeuvre de la "méthode de la tension moitié", le balayage en fréquence pour les modes propres de la corde de Melde, la latitude de mise au point en optique, la recherche du phénomène de résonance pour un système électrique ou mécanique du second ordre, la recherche du minimum de déviation avec un prisme ou un réseau, etc...

3.3) Mesure effectuée à l'aide d'un instrument de mesure numérique (de précision connue)

Il est **FAUX** de penser que la précision d'un instrument numérique est "bêtement" liée au dernier digit affiché. Conclure hâtivement $U = (6,08 \pm 0,01)V$ pour la mesure de tension illustrée page 1 serait fort mal venu !

Dans la notice, le constructeur d'un multimètre numérique indique une relation du type : $\boxed{\%L + nUR}$ où L désigne la valeur lue sur l'instrument (avec tous les chiffres affichés), n un entier et UR est "l'unité de représentation" correspondant au rang du dernier chiffre affiché. En anglais, cela donne : $\boxed{\%R + nD}$ pour "Reading" et "Digit".

Cette relation permet d'évaluer l'incertitude-type sur la valeur affichée.

Exemple : la notice du voltmètre de la page 1 indique dans la colonne "précision" : $0,1\% L + 2$ digits pour le calibre 10V utilisé.

On a donc directement : $u(U) = \frac{0,1}{100} \times 6,08 + 2 \times 0,01 = 0,02608$ V

Remarques : L'incertitude présente deux composantes : une composante croissant avec la valeur lue (défaut de calibrage d'un appareil à l'autre) à laquelle s'ajoute une composante incompressible qui est directement imputable aux erreurs aléatoires qui font fluctuer le dernier digit (bruits lors de la mesure...). L'incertitude-type sera d'autant plus faible que le calibre utilisé sera petit... Si on ne connaît pas l'ordre de grandeur du mesurande, toujours commencer en utilisant le calibre le plus élevé puis le diminuer progressivement sans faire saturer l'appareil (bip...).

3.4) Mesure effectuée à l'aide d'un instrument de mesure analogique (gradué)

Avec ce type d'appareil de mesure (règle graduée, thermomètre à mercure ou à alcool, chronomètre à aiguille, burette en chimie, ...), on adopte là aussi le modèle (assez pessimiste) de la distribution rectangulaire : la probabilité de trouver la valeur vraie est la même où que l'on soit entre la graduation juste en dessous de ce qu'on lit et la graduation juste au dessus. Cette probabilité chute à zéro brusquement au passage de ces graduations.

Exemple 1 : la burette utilisée en page 1 est précise au $1/10^e$ de millilitre. L'étendue des valeurs possibles est de largeur $2d = 0,1 \text{ mL}$. L'incertitude-type sur la position du ménisque est : $u(x) = \frac{d}{\sqrt{3}} \approx 0,029 \text{ mL}$. Cependant, la détermination du volume de liquide versé s'effectue par une double lecture (il faut bien "faire le zéro" avant de démarrer le dosage). On retient alors : $u(V) = \sqrt{2} \times 0,029 = 0,041 \text{ mL}$. (voir "double lecture" au §5.2)
On peut conclure : $V = (42,250 \pm 0,041) \text{ mL}$.

Remarque : une distribution triangulaire pourrait sembler plus pertinente car si le niveau de liquide apparaît clairement entre deux graduations à l'oeil, on se doute qu'il y a plus de chances qu'il soit à mi-chemin plutôt que sur les bords de l'intervalle de largeur $2d$. Il faudrait donc dans les calculs précédents, remplacer le $\sqrt{3}$ par $\sqrt{6}$. On aboutit à une incertitude-type inférieure (modèle moins pessimiste) à la précédente. L'écart est cependant mineur et le parti pris discutable.
A niveau CPGE, répétons le, on s'en tiendra à l'utilisation de la distribution rectangulaire.

Exemple 2 : En optique, on cherche à déterminer la position x d'une lentille permettant de former l'image d'un objet sur un écran. Ceci peut se faire en disposant la lentille sur un support que l'on fait coulisser sur un banc gradué. On déplace la lentille jusqu'à observer une image nette sur l'écran. Dans cette situation, l'incertitude de mesure a deux origines indépendantes : l'incertitude de lecture et la latitude de mise au point (*map*).

En exploitant la photographie page 1 et en effectuant le même traitement que dans les exemples précédents, on obtient : $u(x)_{\text{lecture}} = \frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0,29 \text{ mm}$. On constate cependant que l'on observe une image nette pour tout un intervalle de positions de la lentille. On repère alors les positions extrémales : $x_{\min} = 597 \text{ mm}$ $x_{\max} = 601 \text{ mm}$.
L'hypothèse d'une loi uniforme conduit ainsi à : $u(x)_{\text{map}} = 1,2 \text{ mm}$

Un résultat de statistique montre qu'en présence de plusieurs composantes indépendantes de l'erreur lors d'un processus de mesurage, les variances s'ajoutent. La variance étant le carré de l'écart-type, il faut donc ajouter les incertitudes-type de manière quadratique : $u(x)^2 = u(x_{\text{lecture}})^2 + u(x_{\text{map}})^2$

Numériquement : $u(x) = \sqrt{0,29^2 + 1,2^2} \approx 1,2 \text{ mm}$. On constate que l'incertitude-type liée à la mise au point est dominante (effet accentué par les carrés) et que l'on peut omettre l'incertitude-type de lecture : $x = (599,0 \pm 1,2) \text{ mm}$. Inversement si la mesure avait été effectuée avec un banc gradué en cm, on aurait eu $u(x)_{\text{lecture}} = 2,9 \text{ mm}$ et la latitude de mise au point aurait été la même mais l'expérimentateur aurait eu bien des difficultés à l'estimer faute de graduations adaptées : $u(x) = \sqrt{2,9^2 + ?^2} \approx 2,9 \text{ mm}$ et $x = (600,0 \pm 2,9) \text{ mm}$.

Il s'aperçoit, **en amont de tout calcul**, que c'est l'erreur de lecture qui domine lors de l'évaluation de l'incertitude.

Remarque : l'abscisse x lue sur le banc est celle du support mais il n'est pas acquis que ce soit aussi celle du centre optique de la lentille que l'on a fixé dessus (forme du pied, déport éventuel...). Un tel décalage affecterait toutes les mesures de la même façon : il s'agit d'une erreur systématique qu'il convient de détecter, d'évaluer et de corriger. Elle ne rentre pas en ligne de compte dans le calcul d'incertitude : ce n'en est pas une mais plutôt une certitude puisque l'on sait qu'il y a un décalage !

Dans la méthode de Bessel (focométrie) on s'intéresse à la distance $d = x_2 - x_1$ séparant deux positions de la même lentille dans des configurations optiques différentes. L'erreur systématique sur chacune des valeurs de x s'élimine par soustraction.

4) Règles d'écriture d'un résultat scientifique

Le résultat d'un mesurage doit être accompagnée de son incertitude-type.

On l'écrira sous la forme : $x = (x \pm u(x)) \text{ unité}$ où la valeur retenue pour x est soit la valeur de la mesure unique soit la moyenne arithmétique $\bar{x}$ dans le cas d'une série de n mesures. Les règles à respecter sont :

- a) $u(x)$ doit être **arrondi** en ne conservant **qu'un seul ou 2 chiffres significatifs...** pas plus !
Rappel au lycéen distrait : un zéro situé à droite est significatif tandis qu'un zéro situé à gauche ne l'est pas.
- b) x doit être arrondi de telle sorte que x et $u(x)$ **comportent autant de décimales.**
- c) Il faut exprimer x et $u(x)$ **dans la même unité.**

Exemple : Le voltmètre de la page 1 affiche pour le calibre 10 V une précision : "0,1% L + 2 digits"

On a retenu au §3.3 une incertitude-type : $u(U) = 0,02608 \text{ V}$.

On conclue ainsi : $U = (6,080 \pm 0,026) \text{ V}$ ou bien : $U = (6,08 \pm 0,03) \text{ V}$

Les écritures suivantes seront considérées incorrectes sur un compte-rendu de TP et seront sanctionnées :

$U = (6,08 \pm 0,02608) \text{ V}$ car elle ne respecte pas la règle a) : le 0 et le 8 n'apportent rien !

$U = (6,08 \pm 0,026) \text{ V}$ non respect de b) : 2 décimales pour U et 3 pour $u(U)$; ce n'est pas arrondi au même rang

$U = 6,08 \text{ V} \pm 26 \text{ mV}$ car elle ne respecte pas la règle c) et oblige le lecteur à une gymnastique assez pénible.

Remarque : si l'indication de la notice avait été : "20% L + 10 digits", on aurait calculé $u(U) = 1,316 \text{ V}$ et on aurait conclu : $(U = 6,1 \pm 1,3) \text{ V}$. On s'aperçoit ici que tous les chiffres affichés par un instrument de piètre qualité ne sont pas nécessairement significatifs. Dans le cas présent le 8 n'a aucun sens.

Notons enfin qu'il n'est pas obligatoire qu'un résultat soit exprimé dans le système international d'unités.

Une conclusion du type : "la longueur d'onde des ultrasons est : $\lambda = (0,00860 \pm 0,00021) \text{ m}$ ", même si elle respecte les 3 règles énoncées plus haut est assez désagréable à lire, voire dangereuse à recopier...

On favorisera donc l'emploi des multiples ou sous-multiples d'unités : $\lambda = (8,60 \pm 0,21) \text{ mm}$ ou, si l'on veut rester dans le système SI, un emploi factorisé des puissances de 10 est recommandé : $\lambda = (8,60 \pm 0,21) \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Remarque : si les valeurs mesurées sont données sans leur incertitude-type, le résultat d'un calcul (impliquant multiplications et/ou divisions) doit être écrit avec le nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en possède le moins. Cette règle, de toute évidence approximative, est peu suivie en dehors du cadre scolaire. Nous l'appliquerons néanmoins "faute de mieux".

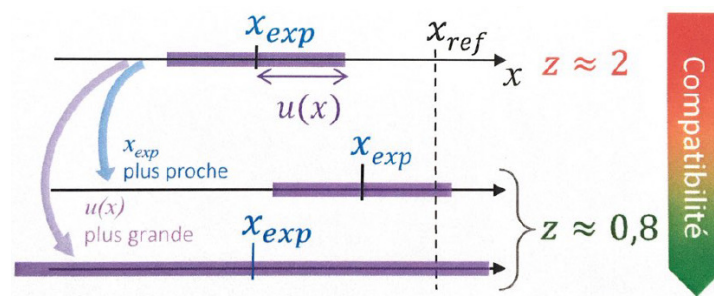
5) Comparaison de deux valeurs - Ecart normalisé ou "z-score"

En TP, on est souvent amené à comparer un résultat expérimental à **une valeur de référence** x_{ref} (valeur tabulée, donnée par un fabricant ou encore prédite par un modèle physique...). Par définition, l'incertitude-type quantifie les fluctuations potentielles de la **valeur expérimentale** x_{exp} . On s'attend à ce que celle-ci ne coïncide pas exactement avec la valeur de référence mais ne s'en écarte pas de plus de quelques incertitudes-type.

On définit l'écart normalisé (aussi appelé "z-score") par la relation :

$$z = \frac{|x_{exp} - x_{ref}|}{u(x)}$$

Il représente une évaluation de la compatibilité entre le résultat de la mesure et la valeur de référence.



Lorsque $z < 2$, on considère que le résultat de la mesure est compatible avec la valeur de référence.

Lorsque $z \geq 2$, on considère qu'il ne l'est pas.

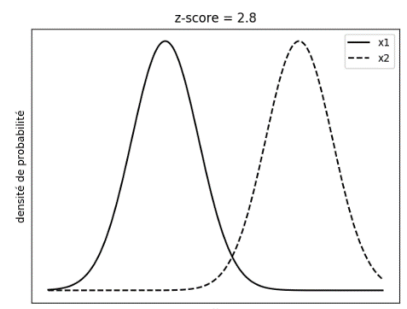
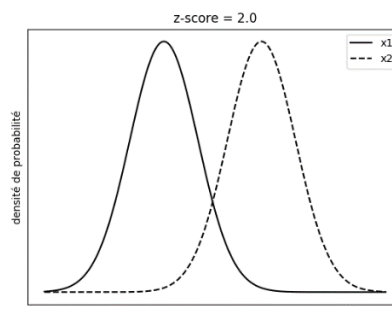
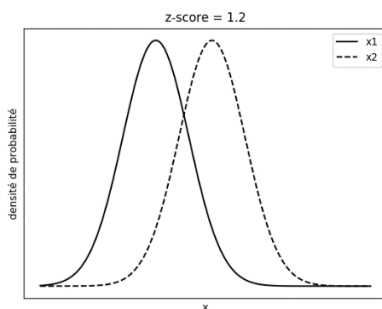
Ce seuil de 2, d'origine historique, est fixé arbitrairement. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques autres que la physique comme la médecine, la pharmacie, la biologie, l'économie, etc... Des seuils de décision différents peuvent néanmoins être employés dans certains domaines comme en physique des particules par exemple.

Si l'on est amené à comparer deux résultats expérimentaux (notés x_1 et x_2) obtenus indépendamment (en utilisant deux méthodes différentes par exemple) avec pour chacun une incertitude-type associée ($u(x_1)$ et $u(x_2)$),

l'expression du z-score devient :

$$z = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Le critère de décision est le même que précédemment. Les représentations ci-dessous permettent de le visualiser dans le cas de distributions gaussiennes. Pour $z = 2$, la compatibilité entre les deux résultats est considérée comme un événement suffisamment rare pour être rejetée. On montre que la probabilité de se tromper dans ce processus de décision est de l'ordre de 5%. Cette probabilité diminue encore pour $z > 2$.



6) Variabilité d'une grandeur composée - Propagation des incertitudes-type

6.1) Situation générale

On s'intéresse ici à une **grandeur q obtenue par calcul à partir de la mesure d'autres grandeurs $x, y, z, \dots$ supposées indépendantes** (non corrélées). On doit alors déterminer l'incertitude-type $u(q)$ à attribuer à q à partir des valeurs $x, y, z, \dots$ mesurées et des incertitudes-type $u(x), u(y), u(z), \dots$ associées.

La justification complète du calcul dans le cas général est assez lourde et n'est pas exigible en classe préparatoire. Elle fait intervenir des outils statistiques ainsi que le concept de dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables indépendantes $q = f(x, y, z, \dots)$. On peut démontrer que l'incertitude-type propagée sur q est :

$$u(q) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (u(x))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (u(y))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (u(z))^2 + \dots}$$

Ce qu'il faut connaître, ce sont les résultats de ce calcul dans quelques situations simples.

6.2) Situations simples

- grandeur calculée à partir d'une seule grandeur mesurée : $q = f(x)$

Exemple 1 : On souhaite déterminer la fréquence f d'un signal périodique.

On mesure sa période (à l'aide de curseurs sur l'oscilloscope par exemple) : $T = (24,20 \pm 0,42) \mu s$

La fréquence est donnée par $f = \frac{1}{T} = 41,322314... kHz$ (on garde temporairement beaucoup de chiffres).

Quelle incertitude-type attribuer à f ? Attention celle-ci n'est certainement pas donnée par : $u(f) = \frac{1}{u(T)}$!!!

Cette relation, fût-elle homogène, est un non sens. En effet, plus la mesure de période serait soignée ($u(T)$ faible) plus l'incertitude-type sur la fréquence serait élevée. Inversement, toujours selon cette relation, la mesure de période la plus rudimentaire ($u(T)$ important) serait en mesure de fournir une valeur de fréquence d'une précision diabolique... C'est intolérable !

Déterminer l'incertitude-type propagée sur f revient à relier une petite variation df de la fréquence à une petite variation dT de la période. D'où l'idée d'un calcul de dérivée : $\frac{df}{dT} = \frac{-1}{T^2}$ que l'on écrit : $df = \frac{-dT}{T^2}$.

La présence du signe - s'interprète aisément : si T augmente, f diminue ! Cependant, une incertitude-type étant définie comme une grandeur positive, il disparaît lorsque l'on "assimile" les petites variations aux incertitudes-type.

On retient donc : $u(f) = \frac{u(T)}{T^2}$ et l'on fournit le résultat : $f = (41,32 \pm 0,72) kHz$.

Exemple 2 : On souhaite déterminer la valeur attendue de la période propre T_0 d'un pendule simple. On mesure la longueur du fil : $L = (34,2 \pm 1,7) \text{ cm}$.

Dans le cadre du modèle des petites oscillations (voir cours de mécanique) : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

La procédure précédente (calcul de dérivée puis passage aux u) conduit aisément à : $\frac{u(T_0)}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{u(L)}{L}$.

En prenant $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, on conclue : $T_0 = (1,173 \pm 0,029) \text{ s}$.

Remarque importante : rappelons la règle bien connue des lycéens concernant les chiffres significatifs.

"Le résultat d'un calcul ne doit pas comporter plus de chiffres significatifs que la donnée qui en comporte le moins".

L'exemple précédent est instructif car il montre que cette règle (trop simple pour être rigoureuse !) peut facilement être mise en défaut. En effet le résultat du calcul (T_0) comporte, **après évaluation de l'incertitude-type**, 4 chiffres significatifs alors que la donnée (L) n'en comporte que 3. Ceci est dû à la structure mathématique de la relation liant ces deux grandeurs (présence d'une $\sqrt{\quad}$) qui a pour effet de "tasser" l'incertitude-type (présence du facteur $1/2$ dans l'incertitude-type propagée).

Retenons que :

- Lorsque l'information quant aux incertitudes sur les données est indisponible : on applique la règle sur les chiffres significatifs "faute de mieux"... sans dogmatisme toutefois ! Cette situation est celle rencontrée dans la plupart des exercices de TD, problèmes de DS ou même en TP si l'on manque de temps pour évaluer ces incertitudes.

- Lorsque l'on dispose de cette information (énoncé, documentation, évaluation personnelle...) la règle devient obsolète car l'on peut alors évaluer l'incertitude-type propagée sur la grandeur calculée. On dispose alors d'un outil beaucoup plus fin permettant de savoir combien de chiffres significatifs il convient de garder. (Voir règles énoncées au §4).

- **combinaison linéaire :** $q = \alpha x + \beta y + \dots$

Les variances s'ajoutent ; ce qui implique que les incertitudes-types absolues s'ajoutent de manière quadratique.

$$u(q) = \sqrt{\alpha^2 (u(x))^2 + \beta^2 (u(y))^2 + \dots}$$

Exemple 3 : une simple mesure de distance (sur un banc d'optique par exemple) est obtenue par lecture de deux positions que l'on soustrait : $d = x_2 - x_1$. On lit : $x_1 = (86 \pm 3) \text{ mm}$ et $x_2 = (258 \pm 3) \text{ mm}$

On a alors : $u(d) = \sqrt{2} u(x) = 4,2 \text{ mm}$ car même $u(x)$ pour les deux lectures. (formule de la "double lecture")

On conclut : $d = (172,0 \pm 4,2) \text{ mm}$ et non $d = (172 \pm 6) \text{ mm}$ comme une interprétation pessimiste (méthode du pire) et non probabiliste de l'incertitude pourrait le laisser croire ! En effet, les erreurs commises sur les lectures de x_1 et x_2 peuvent partiellement se compenser ; ce que l'addition brute des incertitudes-type ne prends pas en compte.

Exemple 4 : imaginons que la distance d précédente corresponde au déplacement d'un récepteur d'ultrasons de 20 longueurs d'onde λ : $d = 20\lambda \Rightarrow u(\lambda) = \frac{u(d)}{20}$. On en déduit la longueur d'onde des ultrasons $\lambda = (8,60 \pm 0,21) \text{ mm}$.

Remarque : On voit que plus on augmente le nombre de longueurs d'onde mesurées, plus on améliore la précision du résultat. Attention cependant, l'incertitude-type est bien divisée par 20 et non $\sqrt{20}$ comme cela a été vu au §2 pour l'évaluation de type A d'une incertitude-type. Ce n'est en effet pas du tout la même chose de mesurer une fois une distance correspondant à 20 longueurs d'onde (on fait du type B et on propage l'incertitude sur λ) que d'effectuer 20 mesures consécutives d'une longueur d'onde unique (ça c'est du type A). Les deux protocoles de mesures sont très différents et il incombe à l'expérimentateur (et au candidat lors des épreuves pratiques des concours !) de préciser avec soin le protocole suivi dans son compte rendu d'expérience.

- **Loi de puissance :** $q = k x^\alpha y^\beta \dots$

Dans ce cas très fréquent, ce sont les incertitudes-type relatives qui s'ajoutent de manière quadratique :

$$\frac{u(q)}{|q|} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{u(x)}{x} \right)^2 + \beta^2 \left(\frac{u(y)}{y} \right)^2 + \dots}$$

Exemple 5 : la célérité c des ultrasons dans l'air peut se déduire de la mesure de leur fréquence f et de leur

longueur d'onde λ . La relation à utiliser est : $c = \lambda f \Rightarrow u(c) = c \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{u(f)}{f} \right)^2}$.

En reprenant les valeurs des exemples 1 et 4, le lecteur attentif et soucieux de vérifier les calculs présentés constatera que les deux termes situés sous la $\sqrt{}$ sont du même ordre de grandeur (qqes 10^{-4}). Il n'y a pas lieu de négliger un terme devant l'autre. On aboutit à : $c = (355 \pm 11) \text{ m.s}^{-1}$.

Remarque : ceci correspond à un résultat assez fin (l'incertitude-type relative $\frac{u(c)}{c}$ n'est que de 3%) mais pas nécessairement juste.

En effet, 355 m.s⁻¹ correspondrait à une température de la salle de TP de 45°C... On peut soupçonner une erreur de manipulation. Un élève de SUP manipulant convenablement obtiendra sans peine un résultat bien meilleur que celui-ci !

Exemple 6 : On souhaite déterminer la valeur attendue de la fréquence propre f_0 d'un circuit RLC.

L et C sont mesurées à l'aide d'un impédancemètre dont la notice indique que les mesures sont effectuées à 0,7% près.

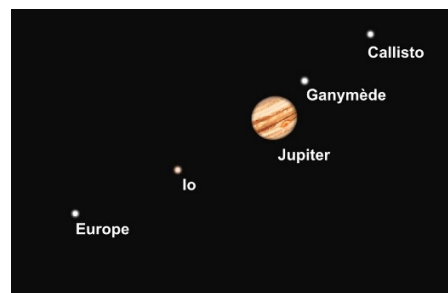
Ce que l'on interprète ainsi : $\frac{u(L)}{L} = \frac{u(C)}{C} = 7.10^{-3}$.

La relation à utiliser est : $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow \frac{u(f_0)}{f_0} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{u(L)}{L} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{u(L)}{L} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{u(L)}{L} \approx 5.10^{-3} \approx 0,5\%$

Il apparaît (comme dans l'exemple 2) que la précision d'un résultat peut être meilleure que celle des données !

Exemple 7 : La masse M de la planète Jupiter peut être évaluée à partir d'une étude de l'orbite supposée circulaire de son plus proche satellite Io.

On évalue le rayon de cette orbite $R = 2,78 \cdot 10^{-3} \text{ UA}$ à 5% près ainsi que la période de révolution $T = 42,7 \text{ h}$ à 2% près.



La troisième loi de Kepler permet d'écrire : $M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \Rightarrow \frac{u(M)}{M} = \sqrt{9 \left(\frac{u(R)}{R} \right)^2 + 4 \left(\frac{u(T)}{T} \right)^2}$

Les incertitudes-type relatives portant sur les données étant du même ordre de grandeur, il n'y a pas lieu, **à priori**, d'en négliger une devant l'autre. Cependant, une analyse attentive montre que par le jeu des carrés et des coefficients pondérateurs, le premier terme sous la $\sqrt{\quad}$ est plus de 10 fois supérieur au second. L'incertitude sur M est donc dominée par celle portant sur la mesure de R . C'est par conséquent cette dernière qu'il faudra soigner en priorité si l'on souhaite améliorer à moindre frais la précision sur le résultat final.

Ayant à l'esprit que l'on ne va conserver que 2 chiffre(s) significatif(s) dans l'incertitude propagée, on peut en simplifier l'expression : $\frac{u(M)}{M} \approx 3 \frac{u(R)}{R} \approx 15\%$.

En prenant pour l'unité astronomique : $1 \text{ UA} = 150 \text{ millions de km}$ et pour la constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ en unité SI, on peut fournir comme résultat final : $M = (1,82 \pm 0,27) \cdot 10^{27} \text{ kg}$.

5.3) Autres situations (voir TP)

Si un calcul d'incertitude propagée ne correspond à aucune des situations simples précédentes, la relation à appliquer (issue comme les autres de la relation générale du §5.1) doit être **donnée par l'énoncé**.

Une autre méthode permettant d'estimer la variabilité d'une grandeur composée est la **méthode de Monte-Carlo**.

Elle consiste à **simuler à l'aide d'un langage de programmation un très grand nombre d'expériences fictives** avec des **résultats aléatoires** pour les grandeurs d'entrée. Calculer à chaque fois la valeur de la grandeur composée puis estimer l'écart-type de la distribution des résultats obtenus. Cette méthode sera présentée et mise en oeuvre en cours d'année à l'aide du langage de programmation Python : cela sera une occasion de manipuler les tableaux numpy et les générateurs aléatoires présents dans le module random.

En guise de conclusion :

« Bien que ce Guide fournisse un cadre pour l'estimation de l'incertitude, il ne peut remplacer ni la réflexion critique ni l'honnêteté intellectuelle ni la compétence professionnelle. L'évaluation de l'incertitude n'est jamais une tâche de routine ni une opération purement mathématique ; elle dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage. La qualité et l'utilité de l'incertitude fournie pour le résultat d'un mesurage dépendent, en fin de compte, de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de [celles et] ceux qui contribuent à son évaluation. »