Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
Feuille 2

TD 2 : Logique et raisonnement.

---

1 Implication et analyse/synthèse

Exercice 1.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$. Montrer que $a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2} \Leftrightarrow b=d$ et $a=c$.

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_1,\ldots,x_n, M$ des réels. Montrer que

$$x_1+\ldots+x_n > M \Rightarrow \max(x_1,\ldots,x_n) > \frac{M}{n}$$

Exercice 3.
Résoudre $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3} = 2x$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
Déterminer l'ensemble des réels x tels que $x+1 = \sqrt{x+3}$.

Exercice 5.
Montrer que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'une fonction linéaire $x \mapsto ax$ et d'une fonction dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle.

Exercice 6.
Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction s'annulant en 0 et d'une fonction constante.

Exercice 7.
Déterminer les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $f(n+m) = f(n)+f(m)$.

2 Raisonner par l'absurde

Exercice 8.
Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 9.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répartit au hasard $n+1$ chaussettes dans n tiroirs. Montrer qu'il existe au moins un tiroir contenant deux chaussettes.

Exercice 10.
Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $rx \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r=0$.

Exercice 11.
Soient a et b deux rationnels strictement positifs. On suppose que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 12.
Montrer qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre $\sqrt{n(n+2)}$ et $(n+1)$.

3 Raisonnement par contraposée

Exercice 13.
Soit a et b réels, montrer que

$$a+b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a \notin \mathbb{Q} \text{ ou } b \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 14.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+1$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si f ne change pas de signe alors $a=0$.

4 Raisonner par équivalence

Exercice 15.
Montrer, sans calculatrice, que $\sqrt{2} \leqslant \sqrt[3]{3}$.

Exercice 16.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

Exercice 17.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\left(\dfrac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x+9$.

Exercice 18.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x+1 < \sqrt{x^2+8}$.

5 Raisonner par récurrence

Exercice 19.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = 1^3+2^3+\cdots+n^3$. Démontrer que l'on a $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 20.
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 3$ et $v_{n+2} = 4v_{n+1}-4v_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n\left(1+\dfrac{n}{2}\right)$.

Exercice 21.
On considère la suite définie par $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1+\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in N, u_n = 1 - \alpha + \alpha 2^n$.

6 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 22.
Montrer, sans calculatrice, que $\dfrac{\sqrt{5}}{2} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Exercice 23.
Montrer que pour tout $a, b > 0$, $\frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b)) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 24.
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $a\ln 2 + b\ln 3 = c\ln 2 + d\ln 3 \Leftrightarrow b = d$ et $a = c$.

Exercice 25.
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $1 \leqslant x \leqslant y$, montrer que

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y.$$

Exercice 26.
Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 1$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 8$.

Exercice 27.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^\star)^2$, résoudre $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{x+a+b}$.

Exercice 28.
Résoudre $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$.

Exercice 29.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2$.

Exercice 30.
Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 31.
Une classe contient 40 élèves. Montrer qu'il existe au moins quatre élèves nés le même mois.

Exercice 32.
Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $r + x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 33.
Montrer qu'il n'existe pas d'entiers strictement compris entre $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$.

Exercice 34.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)\cdot n$. Démontrer que l'on a $S_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.

Exercice 35.
Soit $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 36.
Montrer que tout polynôme s'écrit comme la somme d'un polynôme s'annulant en 1 et d'un polynôme constant.

7 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 37.
Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ des réels appartenant à $[0,1]$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geqslant 1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Exercice 38.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Exercice 39.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 40.
Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si $n = 4m$ avec m un nombre premier impair, alors il s'écrit comme la différence de deux carrés de même parité.

Exercice 41.
Soit $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^3$, montrer que

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$$

Exercice 42.
Soit $m \in \mathbb{R}$, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, mx + 1 \geqslant 0) \Leftrightarrow m = 0.$$

Memo

- Comment montrer une propriété ?
  - Utiliser un raisonnement direct
  - Raisonner par équivalence
  - Raisonner par l'absurde
  - Raisonner par analyse/synthèse
- Comment montrer une implication ?
  - Utiliser un raisonnement direct
  - Raisonner par l'absurde
  - Raisonner par contraposée
- Comment montrer une équivalence ?
  - Raisonner par équivalence
  - Raisonner par double implication
- Comment montrer une propriété valable pour tout entier ?
  - Faire une récurrence
  - Utiliser un raisonnement direct