Lycée du Parc
PCSI 842
Feuille 3

Année 2024-2025

TD n3 : Calculs algébriques.

---

classique   demande réflexion

1 Manipulation et majoration de sommes

Exercice 1.
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x_k = n(n+2)$$

Soit $n\in\mathbb{N}$, déterminer les valeurs de

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{6} x_k$
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} x_k$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{2n} x_k$
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} 2x_k$
5. $S_5 = \sum_{k=n+1}^{2n} x_k$

Exercice 2.

1. Écrire la somme des entiers impairs compris entre 1 et 777 inclus à l'aide du symbole $\sum$ et la calculer.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$.

Exercice 3.
Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Écrire l'expression $U_n = 1-2x+4x^2+\cdots+(-1)^n 2^n x^n$ à l'aide du signe $\sum$ et la calculer.

2 Changement d'indice

Exercice 4.
On pose $S = \sum_{k=m}^{n} k$.

1. Faites un changement d'indices en conservant les mêmes bornes.
2. Retrouvez l'expression de S en calculant $2S$.

Exercice 5.
Soit $S = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2$. Faites un changement de variables dans S tel que :

1. La somme varie de 0 à $n-1$.
2. La somme soit comptée à l'envers avec les mêmes bornes.
3. La somme soit comptée à l'envers et commence à $k=0$.

3 Somme et produit particuliers

Exercice 6.
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} 3^{1-k}$.

Exercice 7.
Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer $\prod_{k=0}^{n} 2^k$.

Exercice 8.
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod_{k=1}^{n}(5n+3-k)$.

Exercice 9.
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

4 Sommes doubles

Exercice 10.
Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q}\sum_{k=0}^{p} 2^k$$

Exercice 11.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 12.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)$.

Exercice 13.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=0}^{k} p$.

Exercice 14.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=0}^{k} k$

Exercice 15.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{p=0}^{k} n$.

Exercice 16.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{i+j\leqslant n} i$.

Exercice 17.

Soit $n\geqslant 1$ et $x_1,x_2,...,x_n$ des réels vérifiant : $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k=n$, et $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2=n$. Prouver que $x_k=1$ $\forall k\in[\![1,n]\!]$.

5 Somme et produit télescopiques

Exercice 18.

Simplifier le produit $\prod\limits_{k=3}^{31}\dfrac{2k-1}{2k+1}$ et l'écrire sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 19.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 20.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$.

6 Binôme de Newton et coefficients binomiaux

Exercice 21.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{1-k}$.

Exercice 22.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$.

Exercice 23.

Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des réels telle que : $\forall n\in\mathbb{N}, \alpha_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k}$. Donner une expression de α_n en fonction de $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}$.

Exercice 24.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\,\text{pair}}}\begin{pmatrix}n\\ j\end{pmatrix}$ et $\sum\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\,\text{impair}}}\begin{pmatrix}n\\ j\end{pmatrix}$.

7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 25.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ et $a\in\mathbb{R}$. On pose $V_n=\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{ka}{n}}$.

1. Expliciter V_1 et V_2.
2. Calculer V_n .

Exercice 26.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Écrire le nombre $1,11\dots1$ (avec n chiffres après la virgule) sous la forme d'une somme de termes d'une suite géométrique et calculer cette somme. En faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire que le nombre $1,11\dots$ (avec une " infinité ", de chiffres après la virgule) est rationnel et l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Même question avec $0,99\dots9$.

Exercice 27.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $S=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+\sum\limits_{k=1}^{n+1}(k+1)^2-2\sum\limits_{k=0}^{n+1}k(k+1)$.

Exercice 28.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod\limits_{k=0}^{n}(2n-4+k)$

Exercice 29.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(2i-j)$.

Exercice 30.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{i+j<n}(i+j)$.

Exercice 31.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)$.

Exercice 32.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4$.

1. Calculer cette somme en remarquant qu'elle est télescopique.
2. Exprimer cette somme en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ en développant son terme général.
3. En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 33.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} kk!$.

Exercice 34.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{1}{k(k+1)}}{\cos \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1}}$.

Exercice 35.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 36.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$.

Exercice 37.
Soit $(n,p,k) \in \mathbb{N}^3$ avec $k \leqslant p \leqslant n$. Montrer que $\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 38.
Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que $(1{,}01)^{100} > 2$.

Exercice 39.
Soient $k \leqslant n$ deux entiers, montrer que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 40.

1. Montrer que $\frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide du résultat $\sum_{k=0}^{m} k\binom{m}{k}x^{k-1} = m(1+x)^{m-1}$ vu en cours.

Exercice 41.

1. Montrer que si (α_i) est une famille d'entiers et a un réel, alors :
$$\prod_{i=1}^{n} a^{\alpha_i} = a^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$
2. Calculer la valeur de $\prod_{i+j \leqslant n} a^i b^j$ pour a et b réels.
3. Calculer $\prod_{i+j \leqslant n} a^i$.
4. Retrouver la valeur de $\prod_{i+j \leqslant n} a^i b^j$ pour a et b réels.

Exercice 42.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} (3k+1)(3k-1)$.

Exercice 43.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $2n$ réels tels que :
$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n.$$
Montrer que : $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
On pourra examiner la quantité : $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$.

Exercice 44.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Calculer $\sum_{k=0}^{n+1} \sin 1 \sin(k+1)$

Exercice 45.

1. Soit une famille de réels $(s_{i\,j})_{i\in[\![1,n]\!],\,j\in[\![1,n]\!]}$ tels que $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!]$, $s_{i\,j} = s_{j\,i}$, et $s_{i\,i} = 0$.
   Montrer que : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} s_{i\,j} = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{i\,j}$.
2. En déduire que si $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ sont deux familles de réels :
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

   Remarque : cette inégalité peut aussi se démontrer directement par récurrence.

Mémo

- Comment effectuer un changement d'indice ?
  On pose le changement d'indice, on détermine les nouvelles bornes de cet indice puis on exprime le terme général en fonction du nouvel indice.
- Comment additionner deux sommes/multiplier deux produits ?
  On se ramène à des bornes identiques, quitte à enlever des termes extrêmes.
- Comment permuter deux signes sommes/produits ?
  Si les bornes ne dépendent pas des indices, on les permute sans rien changer.
  Sinon, il faut permuter le rôle des indices pour déterminer les bornes des deux sommes.
- Comment calculer une somme avec des coefficients binomiaux ?
  Selon la somme, on fait apparaître la formule du binôme de Newton ou on utilise les relations du cours sur les coefficients binomiaux.
- Comment simplifier une expression avec des factorielles ?
  Il faut revenir à la définition de la factorielle en tant que produit.
- Comment déterminer les coefficients binomiaux pour de petites puissances ?
  il faut utiliser le triangle de Pascal.