

## TD 1 : Analyse.

 classique  demande réflexion

### 1 Calcul de dérivées

#### Exercice 1.

Dériver les fonctions suivantes en précisant leur domaines de définition et de dérivabilité

- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>f_1 : x \mapsto \sin^2(e^{-x})</math></li> <li>2. <math>f_2 : x \mapsto \tan(\cos x)</math></li> <li>3. <math>f_3 : x \mapsto \sqrt{1 + \sin^2 x}</math></li> <li>4. <math>f_4 : x \mapsto \frac{1}{1 + \cos^2 x}</math></li> <li>5. <math>f_5 : x \mapsto \frac{1}{1 + x^4}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>6. <math>f_6 : x \mapsto \cos \sqrt{1 + x^3}</math></li> <li>7. <math>f_7 : x \mapsto \sin(e^{-\sqrt{x^2+1}})</math></li> <li>8. <math>f_8 : x \mapsto e^{(1+\cos x)^4}</math></li> <li>9. <math>f_9 : x \mapsto \frac{1}{(1+x^3)^2}</math></li> <li>10. <math>f_{10} : x \mapsto e^{\cos x}</math></li> </ol> |
|--|---|

#### Exercice 2.

Étudier les variations de  $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$  en précisant son domaine de définition et de dérivabilité.

### 2 Inégalités

#### Exercice 3.

1. Déterminer l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}^*$  tels que  $\frac{1}{t} \leq -2$ .
2. Déterminer l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}^*$  tels que  $\frac{1}{t} \leq 2t$ .

#### Exercice 4.

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$ .

#### Exercice 5.

Le produit de deux fonctions croissantes est-il croissant?

#### Exercice 6.

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, ne^{-n/4} < 2$ .

#### Exercice 7.

Soit  $a > 0$ . Déterminer un majorant et un minorant des fonctions suivantes.

$$f_1 : \begin{cases} [1, 10] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{\ln(t)}{t} \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{\sin(t)}{1+t^2} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} [0, 3] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{1-at}{2e^t-1} \end{cases}$$

### 3 Intégrales

#### Exercice 8.

Calculer  $\int_1^2 t \ln t \, dt$ .

#### Exercice 9.

Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x \, dx$ .

#### Exercice 10.

Calculer  $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx$ .

#### Exercice 11.

Calculer  $\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3} \, dx$

#### Exercice 12.

Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{\cos(x)} \, dx$ .

#### Exercice 13.

Calculer  $\int_1^2 t e^{t^2} \, dt$ .

#### Exercice 14.

Calculer  $\int_2^3 \frac{dt}{t \ln t}$ .

### 4 Si besoin d'encre un peu d'entraînement

#### Exercice 15.

Étudier les variations des fonctions suivantes

- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>f_1 : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})</math>.</li> <li>2. <math>f_2 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. <math>f_3 : x \mapsto \sqrt{1 - \sin x}</math></li> <li>4. <math>f_4 : x \mapsto e^{\sin(2x)}</math></li> </ol> |
|---|---|

#### Exercice 16.

1. Montrer que pour tout  $x \leq 0$ ,  $\frac{e^x - x^2}{1 + x^2} \leq 1$ .
2. Montrer que pour tout  $x \geq 2$ ,  $\frac{x^2 - 2}{x - 1} \geq 2$ .

**Exercice 17.**

Calculer Les dérivées des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \ln(1+x^2)$

2.  $x \mapsto \cos^3(x)$

3.  $x \mapsto \sqrt{1+\sin^2 x}$

4.  $x \mapsto \sin(1+x^3)$

5.  $t \mapsto \frac{1}{e^t+1}$

6.  $t \mapsto (1+e^t)^4$

7.  $x \mapsto (1+\cos(x))^n$

8.  $x \mapsto (1+\sin x)^4$

9.  $x \mapsto \frac{1}{1+2\cos(x)}$

10.  $t \mapsto \ln(t^2+3t-2)$

11.  $t \mapsto (t-1)^n(t+1)^n$

12.  $x \mapsto \ln(1+\cos^2(x))$

13.  $x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$

14.  $t \mapsto e^{\tan(t)}$

15.  $t \mapsto e^{\sqrt{t}+1}$

16.  $x \mapsto \frac{1}{(1+\sin x)^2}$

**Exercice 18.**

Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1], 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1]$ .

**Exercice 19.**

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$  puis  $\forall x \in [0, 1[, e^x \leq \frac{1}{1-x}$ .

**Exercice 20.**

Soit  $a > 0$ . Déterminer un majorant et un minorant des fonctions suivantes

$$f_1 : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \ln(t^2+1) + \frac{3t}{a+t^2} \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{at^2}{1+e^t} - \frac{t^2}{a^2} \end{cases}$$

**Exercice 21.**

Calculer  $\int_0^1 (t^2-t+1)e^{-t} dt$ .

**Exercice 22.**

Calculer  $\int_1^e \frac{\ln x dx}{x^n}, n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 23.**

Calculer  $\int_1^2 \frac{\ln t dt}{t}$ .

**Exercice 24.**

Calculer  $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}}$ .

**5 Une fois qu'on est à l'aise****Exercice 25.**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions deux fois dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose  $h = g \circ f$ . Donner une expression de  $h''$ .

**Exercice 26.** ✨

Soit  $(x, y) \in ]-1, 1[^2$ , montrer que  $\frac{x+y}{1+xy} \in ]-1, 1[$ .

**Exercice 27.**

Déterminer les entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{10}$ .

**Exercice 28.** ✨

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer combien de réels vérifient  $x^3 - x = a^3 - a$ .

**Exercice 29.**

Déterminer les entiers  $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tels que  $n^m = m^n$ .

**Exercice 30.**

Soit  $n \geq 2, (p, q) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que l'équation  $x^n + px + q = 0$  admet au plus deux racines réelles si  $n$  est pair, au plus trois racines réelles si  $n$  est impair.

**Exercice 31.** ✨

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\forall x \in [0, 2[$ ,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{2+x}{2-x}$$