Réponses du TD n 1

Réponse 1 1. $\forall x\in\mathbb{R}, f_1'(x) = -e^{-x}\sin(2e^{-x})$.

2. $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, f_2'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos^2(\cos x)}$.
3. $\forall x\in\mathbb{R}, f_3'(x) = \dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.
4. $\forall x\in\mathbb{R}, f_4'(x) = \dfrac{2\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}$.
5. $\forall x\in\mathbb{R}, f_5'(x) - \dfrac{4x^3}{(1+x^4)^2}$.
6. $\forall x\in[-1,+\infty[\ f'-6(x) = -\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\sin\sqrt{1+x^3}$.
7. $\forall x\in\mathbb{R}, f_7'(x) = -\dfrac{xe^{-\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}\cos(e^{-\sqrt{1+x^2}})$.
8. $\forall x\in\mathbb{R}, f_8'(x) = -4\sin x(1+\cos x)^3 e^{(1+\cos x)^4}$.
9. $\forall x\in\mathbb{R}, f_9'(x) = -\dfrac{6x^2}{(1+x^3)^3}$.
10. $\forall x\in\mathbb{R}, f_{10}'(x) = -\sin x e^{\cos x}$.

Réponse 2 Pour tout $x\neq 0$, on a $f'(x) = f'(x) = \dfrac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}$, f décroit et tend vers $+\infty$ et 0 en $\pm\infty$.

Réponse 3 1. $\left[-\dfrac{1}{2},0\right[$

2. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[\cup\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right[$

Réponse 5 non

Réponse 7 1. $0\leqslant\dfrac{\ln(t)}{t}\leqslant\ln(10)$

2. $-1\leqslant\dfrac{\sin(t)}{1+t^2}\leqslant 1$.
3. $-(1+3a)\leqslant\dfrac{1-at}{2e^t-1}\leqslant 1+3a$

Réponse 8 $2\ln(2)-\dfrac{3}{4}$

Réponse 9 $e^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}$

Réponse 10 $\dfrac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

Réponse 11 $\dfrac{\ln(9)}{3}$

Réponse 12 $e-1$

Réponse 13 $\dfrac{1}{2}(e^4-e)$

Réponse 14 $\ln\ln(3)-\ln\ln(2)$

Réponse 15 1. $\forall x\in\mathbb{R}, f_1'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, la fonction est décroissante.

2. $\forall x\in\mathbb{R}, f_2'(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$, elle est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x\in[0,2\pi], f_3'(x) = \dfrac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}$, f_3 est décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ puis à nouveau décroissante puis 2π-périodique.
4. $\forall x\in[0,2\pi], f_4'(x) = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$. Elle est croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ puis à nouveau croissante puis 2π-périodique.

Réponse 17 1. $x\mapsto\dfrac{2x}{1+x^2}$

2. $x\mapsto -3\sin(x)\cos^2(x)$
3. $x\mapsto\dfrac{\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$
4. $x\mapsto 3x^2\cos(1+x^3)$
5. $t\mapsto\dfrac{-e^t}{(e^t+1)^2}$
6. $t\mapsto 4e^t(1+e^t)^3$.
7. $x\mapsto -n\sin(x)(1+\cos(x))^{n-1}$
8. $x\mapsto 4\cos(x)(1+\sin(x))^3$.
9. $x\mapsto\dfrac{2\sin(x)}{(1+2\cos(x))^2}$
10. $t\mapsto\dfrac{2t+3}{t^2+3t-2}$.
11. $t\mapsto n2t(t^2-1)^{n-1}$
12. $x\mapsto\dfrac{-2\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$.

13. $x \mapsto \dfrac{1}{2(x+\sqrt{x})}$.
14. $t \mapsto \dfrac{e^{\tan(t)}}{\cos^2(t)}$.
15. $t \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{t}+1}}{2\sqrt{t}}$.
16. $x \mapsto -\dfrac{2\cos(x)}{(1+\sin x)^3}$.

Réponse 20 1. $\dfrac{3t}{a+t^2} \in \left[-\dfrac{3}{a}, \dfrac{3}{a}\right]$

2. un majorant est $\dfrac{a}{1+e^{-1}}$ et un minorant est $-\dfrac{1}{a^2}$.

Réponse 21 $2-4e^{-1}$

Réponse 22 $\dfrac{1}{2}$

Réponse 23 $\dfrac{1}{2}\ln^2(2)$

Réponse 24 $\sqrt{3}-1$

Réponse 25 $h" = f".g' \circ f + (f')^2.g" \circ f$

Réponse 27 $[\![0, 25]\!]$.

Réponse 28 — Si $a \notin \left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$, une solution.

— Si $a = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ou $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ deux solutions.

— Si $a \notin \left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$ et $a \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ trois solutions.

Réponse 29 $(2, 4)$