Techniques fondamentales en analyse

1 Inégalité dans $\mathbb{R}$

Proposition 1.
Soit x, x', y, y' réels.

- $(x \leqslant y \text{ et } x' \leqslant y') \Rightarrow x+x' \leqslant y+y'$.
- $(x \leqslant y \text{ et } x' < y') \Rightarrow x+x' < y+y'$.
- $x \leqslant y \Rightarrow -y \leqslant -x$
- $(x \leqslant y \text{ et } a \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow ax \leqslant ay$
- $(x \leqslant y \text{ et } a \in \mathbb{R}^-) \Rightarrow ay \leqslant ax$
- $0 < x \leqslant y \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$
- $x \leqslant y < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$

Définition 1. On appelle valeur absolue d'un réel x le réel positif noté $|x|$ égal à

$$\begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 2.

1. Soit x, y réels. Alors
$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$
avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.
2. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels, alors
$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Exemples 1.

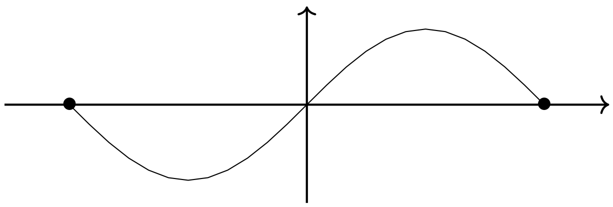
1. *Résoudre* $\dfrac{x+1}{x-5} \leqslant 1$
2. *Résoudre* $x^2 + 3 \leqslant 1$
3. *montrer que* $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{n+k} \right|$ *est majoré par 1.*

Exercice 1.
1. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

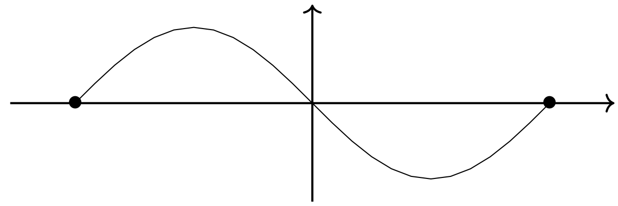
2 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

2.1 Généralités

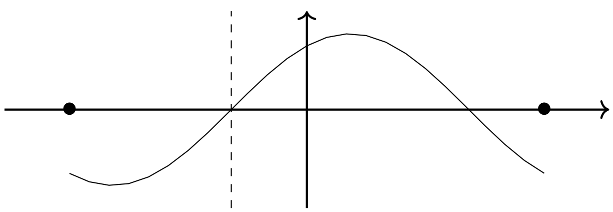
On appelle graphe de f l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.



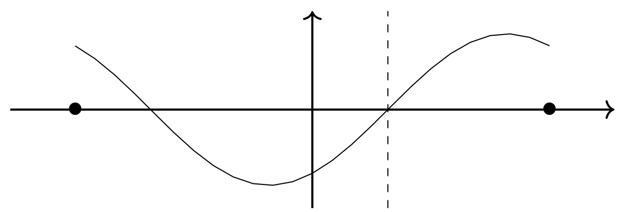
graphe de f



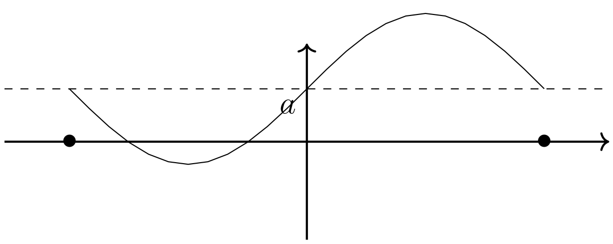
graphe de $x \mapsto f(-x)$



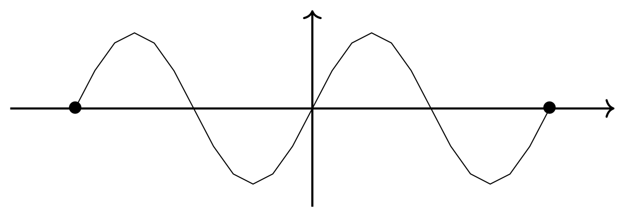
graphe de $x \mapsto f(x+a), a > 0$



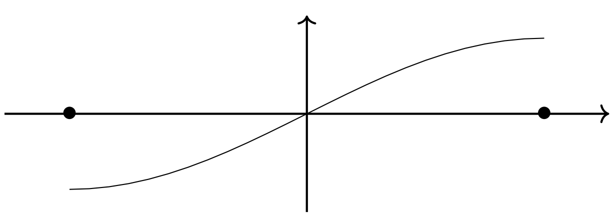
graphe de $x \mapsto f(x+a), a < 0$



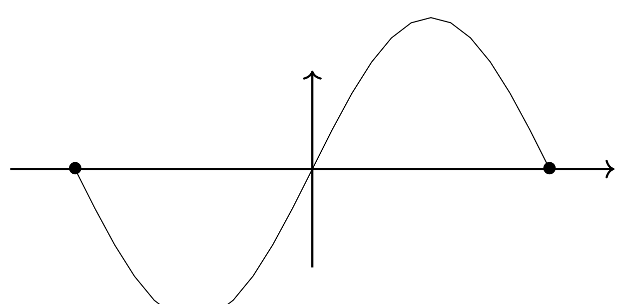
graphe de $x \mapsto f(x) + a, a > 0$



graphe de $x \mapsto f(2x)$



graphe de $x \mapsto f(x/2)$



graphe de $x \mapsto 2f(x)$

Définition 2.

- Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I centré en 0, est dite paire si
$$\forall x \in I, f(-x) = f(x)$$
- Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I centré en 0, est dite impaire si
$$\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$$
- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite périodique ou T-périodique si
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$$
- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, avec D sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dite croissante si
$$\forall (x,y) \in D^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, avec D sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dite strictement croissante si
$$\forall (x,y) \in D^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, avec D sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dite décroissante si
$$\forall (x,y) \in D^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$$
- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, avec D sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dite strictement décroissante si
$$\forall (x,y) \in D^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$
- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, avec D sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition 3. Soit f, g deux fonctions définies sur A, avec A sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- On appelle somme de f et g et on note $f+g$ la fonction définie sur A par $x \mapsto f(x)+g(x)$.
- On appelle produit de f et g et on note fg la fonction définie sur A par $x \mapsto f(x)g(x)$.

Remarque. *La somme de deux fonctions croissantes est croissante, qu'en est-il de la somme d'une fonction croissante et d'une fonction strictement décroissante?*

Définition 4. Soit $f : A \to B$ avec A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in A, f(x) \leqslant M$$
- On dit que f est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in A, f(x) \geqslant m$$
- On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée. C'est équivalent à demander qu'il existe K tel que
$$\forall x \in A, |f(x)| \leqslant K$$

2.2 Dérivation

Définition 5. Soit $f : A \to B$ avec A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en un point a de A s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Elle est dérivable sur A si elle est dérivable en tout point de A.

Proposition 3.
Soit f une fonction dérivable en a, alors l'équation de sa tangente en le point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Proposition 4.
Soient f et g deux fonctions dérivables sur R, alors

- $f + g$ est dérivable et $(f + g)' = f' + g'$.
- af, avec $a \in \mathbb{R}$ est dérivable et $(af)' = af'$.
- fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- $f \circ g$ est dérivable et $(f \circ g)' = g'.f' \circ g$.

Exemples 2.

1. $x \mapsto \cos(ax)$.
2. $x \mapsto (1 + x^2)^n$.
3. $x \mapsto e^x + \cos(x)$.
4. $x \mapsto 3\cos(2x)$.

Rappel des dérivées usuelles:

Soit u une fonction dérivable, n un entier:

$$(u^n)' = nu'.u^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$$
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
$$(e^u)' = u'e^u$$
$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$
$$(\cos \circ u)' = -u' \sin \circ u$$
$$(\sin \circ u)' = u' \cos \circ u$$
$$(\tan \circ u)' = \frac{u'}{\cos^2 \circ u} = u'\left(1 + \tan^2 u\right)$$

2.3 Intégration

Définition 6. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On admet que f admet une primitive, c'est-à-dire une fonction F telle que $F' = f$. On définit

$$\int_a^b f \,\mathrm{d} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Notations: On note $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarques. *1. On a* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$*, on dit que la variable d'intégration est muette.*

2. La définition de $\int_a^b f \,\mathrm{d}$ *ne dépend pas de la primitive* F *choisie.*

Proposition 5.
Soit f, g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, a, b, c et λ des réels. On a :

- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (linéarité de l'intégrale)
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$

Proposition 6.
Soit u, v deux fonctions dérivables, alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples 3.

- *Calculer* $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$.
- *Calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition 7.
Soit f une fonction continue et u une fonction dérivable. On a

$$\int_a^b f \circ u(t).u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

En pratique:

- On va exprimer la nouvelle variable x en fonction de l'ancienne t (par exemple $x = u(t)$).
- On détermine dans quel intervalle varie cette nouvelle variable (si t varie de a à b, x varie de $u(a)$ à $u(b)$).
- On exprime dx en fonction de dt (on a $dx = u'(t)dt$ qui provient de $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{du(t)}{dt} = u'(t)$).
- On exprime $f(t)dt$ à l'aide seulement de x (et dx).

On garde l'ordre des bornes $u(a)$ et $u(b)$ même si $u(a)$ est supérieur à $u(b)$!!

Exemples 4.

1. *Faites le changement de variable* $x = t^2$ *dans l'intégrale* $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$
2. *Soit* f *une fonction paire, que vaut* $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$*?*