Lycée du Parc
842.

Logique et raisonnement

1 Proposition mathématique

1.1 Définitions

Définition 1. Une proposition ou assertion est un énoncé auquel on peut donner, en logique classique, l'une des deux valeurs de vérité vraie (V) ou fausse (F)

Exemples 1.

1. $2+1=3$ *est une assertion vraie,*
2. $2+1=2$ *est une assertion fausse,*
3. $2^n=1$ *n'est pas une assertion.*

Définition 2. Par opposition à une assertion, on définit un prédicat $P(x, y, z, \ldots)$ comme un énoncé dépendant de termes $(x, y, z, \ldots)$ tel que, lorsque l'on remplace ces termes par des éléments de certains ensembles, on obtienne une assertion vraie ou fausse.

Exemple 2. $x^2 \geqslant 0$. *Si on remplace par un réel, l'assertion est vraie, si on remplace par un imaginaire pur, elle est fausse.*

1.2 Connecteurs logiques

Définition 3. Un connecteur logique est une fonction logique qui permet de créer de nouvelles assertions à partir d'assertions.

Il y a trois connecteurs logiques à connaître :

- **La négation**.
  L'assertion NON(P) est l'assertion prenant la valeur de vérité opposée à P. Autrement dit, NON(P) est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie.

  Exemples 3.
  1. *P: " tous les enfants mentent", NON(P): " il y a au moins un enfant qui dit la vérité".*
  2. *P: " Il y a toujours au moins un ticket gagnant", NON(P): "tous les tickets sont perdants".*

- **Le "ET"**
  Si P et Q sont deux assertions, l'assertion "P et Q", notée $P \cap Q$, est l'assertion qui est vraie si P et Q sont vraies et fausse si l'un des deux, ou les deux, sont fausses.

  Exemple 4. *P: " il pleut" Q: "il fait froid".* $P \cap Q$ *: "il pleut ET il fait froid".*

- **le "OU"**: Si P et Q sont deux assertions, l'assertion "P ou Q", notée $P \cup Q$, est l'assertion qui est vraie si P ou Q est vraie (et donc si les deux aussi) et fausse si les deux sont fausses.

  Exemple 5. *P: " il pleut" Q: "il fait froid".* $P \cup Q$ *: "il pleut ou il fait froid ou les deux".*

2 Les quantificateurs ∀ et ∃

2.1 Définitions

Définition 4. Un ensemble est une collection d'objets précis, appelés *éléments* dont l'identification n'est pas ambiguë.

Exemples 6.

1. *L'ensemble des couleurs primaires, l'ensemble des élèves du Parc.*
2. *Les plus beaux élèves du Parc n'est pas un ensemble car cela dépend du goût de chacun ;-)*

On peut définir un ensemble en énumérant ses éléments (quand il n'y en a pas beaucoup : $\{21, 1, 19, 22\}$) ou en décrivant ses éléments (les entiers naturels pairs). Quand on énumère les éléments d'un ensemble, l'ordre dans lequel on le fait n'a aucune importance et les répétitions sont des redondances. C'est une des caractéristiques d'un ensemble.

Exemples 7.

1. *Les ensembles* $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$ *et* $\{1, 2, 3, 1, 2, 3\}$ *sont égaux.*
2. $\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.
3. $\{k^2, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}\} = \{(n-k)^2, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}\}$.

Ensembles classiques : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Définition 5. Soit X un ensemble et x un élément de X. On dit que x appartient à X et on note $x \in X$.

Notons $P(x)$ un prédicat, c'est-à-dire une propriété vérifiée par un élément x. Si cette propriété est vraie pour tous les éléments de X, on note :

$$\forall x \in X, P(x).$$

Exemple 8.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0.$$

S'il existe au moins un élément vérifiant cette propriété, on écrit :

$$\exists x \in X, P(x).$$

S'il existe un unique élément, on écrit

$$\exists! x \in X, P(x).$$

⚠ L'absence de point d'exclamation ne signifie pas que l'élément n'est pas unique mais seulement qu'on ne sait pas s'il l'est

Exemples 9.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 + x^3 + x^2 = 0$.
2. *Traduire avec des quantificateurs, "f est fonction croissante sur $\mathbb{R}$", "f s'annule sur $\mathbb{R}$", "f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$".*

2.2 Quantificateurs multiples

On considère maintenant une propriété qui dépend de deux éléments x et y appartenant à deux ensembles X et Y.

Exemple 10. *$X = \mathbb{R} = Y$, $P(x, y) : x^2 = y$. On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x, y)$. En revanche, $\forall y \in \mathbb{R}$, il n'existe pas nécessairement $x \in \mathbb{R}$ (si y est négatif) et il n'existe pas de y tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x, y)$.*

Il y a 8 phrases possibles avec les deux quantificateurs :

1. $\forall x \in X, \forall y \in Y, P(x, y)$
2. $\forall y \in Y, \forall x \in X, P(x, y)$
3. $\forall x \in X, \exists y \in Y, P(x, y)$
4. $\exists x \in X, \forall y \in Y, P(x, y)$
5. $\exists x \in X, \exists y \in Y, P(x, y)$
6. $\forall y \in Y, \exists x \in X, P(x, y)$
7. $\exists y \in Y, \forall x \in X, P(x, y)$
8. $\exists y \in Y, \exists x \in X, P(x, y)$

Proposition 1.
Permuter deux quantificateurs identiques ne change pas le sens de la phrase, permuter deux quantificateurs différents modifie le sens.

Exemple 11. *X désigne l'ensemble des élèves de la 842, Y désigne l'ensemble des films sortis dans les salles françaises au premier semestre de 2024, $P(x, y)$: l'individu x a vu le film y. Traduire les 8 propositions possibles en français*

2.3 Négation d'une phrase mathématique

Intuitivement, la seule manière de contredire la phrase "$\forall x \in X, P(x)$ est d'exhiber un élément x_0 de X tel que $P(x_0)$ soit fausse.

Proposition 2.
- La négation de $\forall x \in X, P(x)$ est $\exists x \in X, \mathrm{non}(P(x))$.
- La négation de $\exists x \in X, P(x)$ est $\forall x \in X, \mathrm{non}(P(x))$.
- Plus généralement, la négation d'une proposition avec plusieurs quantificateurs s'obtient en remplaçant $\forall$ par $\exists$, $\exists$ par $\forall$ et $P(x)$ par $\mathrm{non}(P(x))$ sans changer leur place dans la phrase!

Exemple 12. *donner la négation de*

- *"$\forall x \in X, x^2 \geqslant 1$",*
- *tous les élèves ont vu au moins un film",*
- *"il existe au moins un film vu par au moins un élève",*
- *"f est fonction strictement croissante",*
- *" f est une fonction paire"*
- $\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

3 Implication

3.1 Définitions et règles

Définition 6. Soient P et Q deux propositions. Nous dirons que la proposition P implique la proposition Q si on peut affirmer que Q est vraie dès lors que P l'est. On note $P \Rightarrow Q$.

Exemple 13. *$Q(x) : x^2 \geqslant 1$, $P(x) : x^2 > 3$ alors $P \Rightarrow Q$.*

Proposition 3.
Si $P \Rightarrow Q$ et P est vraie, alors Q est vraie.

Méthode 1.
En pratique, pour montrer $P \Rightarrow Q$, on peut :

- supposer P vraie et montrer que Q l'est aussi.
- Raisonner par l'absurde: supposer que P est vraie et Q est fausse et aboutir à une contradiction.

Exemples 14.

1. *Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta = 0)$.*

2. *Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Proposition 4.
Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$.

Exemple 15. $x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 \geqslant 1 \Rightarrow 2x^2 + 3 \geqslant 4$.

3.2 Disjonction de cas

Proposition 5 (disjonction de cas)**.**
Si $P \Rightarrow Q$ et $NON(P) \Rightarrow Q$, alors Q est vraie

Exemples 16.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.*
2. *Montrer que $\dfrac{n(n^2-1)}{3} \in \mathbb{N}$.*
3. *Représenter graphiquement la fonction définie par $f(x) = \dfrac{|2x-6|}{|x+4|}$.*

3.3 Condition nécessaire et condition suffisante

Définition 7. Soient P et Q deux propositions mathématiques. On dit que P est une condition nécessaire de Q si $Q \Rightarrow P$ et Q est alors une condition suffisante de P.

Exemples 17.

1. *P: il fait froid, Q: il neige.*

2. *P: marquer un but, Q: gagner le match.*

3.4 Raisonnement par analyse/synthèse

Pour montrer une affirmation, on peut chercher une condition nécessaire à cette affirmation puis montrer que la condition est en réalité suffisante. On peut également utiliser un tel raisonnement pour résoudre une équation: si l'équation admet des solutions, les solutions sont parmi un certain ensemble puis on regarde si tous les éléments de cet ensemble sont bien solution. En pratique, on suppose que l'affirmation est vraie/l'équation admet une solution et on regarde ce que cela implique.

Méthode 2 (Pour déterminer les solutions de l'équation (E))**.**
Analyse : On suppose que (E) admet une solution, on regarde ce que cela implique sur les solutions.
Synthèse : Réciproquement, si un élément vérifie la condition trouvée, on regarde si c'est une solution de (E).

Exemples 18.

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$*:* $\sqrt{x^2+4x+5} = 2x+1$
2. *Trouver les fonctions de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *vérifiant* $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) = f(n)+1$.

Méthode 3 (Pour montrer que $\forall a \in A, \exists (b,c) \in B \times C$ tel que $a = b+c$)**.**
Analyse : Soit $a \in A$. On suppose que $a = b+c$ avec $b \in B$ et $c \in C$, on cherche à obtenir une expression de b et/ou de c en fonction de a.
Synthèse : Soit $a \in A$. On pose $b = _{\textit{ce qu'on a trouvé dans la phase d'analyse}}$ et $c = \dots$. Montrons que :

- $a = b+c$
- $b \in B$
- $c \in C$

Par analyse synthèse, on a montré que tout élément de A s'écrit comme la somme d'un élément de B et d'un élément de C.

Remarque. *Si on arrive à exprimer b (ou c) en fonction de a, c'est gagné pour la phase d'analyse. Il suffira ensuite de poser* $c = a-b$ *(ou* $b = a-c$*) dans la phase de synthèse.*

Exemples 19.

1. *Montrer que tout polynôme de degré au plus 2 peut s'écrire comme la somme d'un polynôme s'annulant en 1 et d'une constante.*
2. *Montrer que toute fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *s'écrit comme la somme d'une fonction constante et d'une fonction dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle.*
3. *Montrer que toute fonction dérivable peut s'écrire comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en 0 et de dérivée nulle en 0.*

3.5 Contraposition

Proposition 6.
Les phrases $P \Rightarrow Q$ et non$(Q) \Rightarrow$ non(P) sont synonymes. La phrase non$(Q) \Rightarrow$ non(P) est appelée la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

Exemples 20.

1. *Il ne fait pas froid implique qu'il ne neige pas.*
2. *Aucun but marqué implique match nul ou perdu.*

En pratique, pour montrer une implication, on se demandera s'il n'est pas plus simple de montrer sa contraposée.

Exemples 21.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que n^2 impair $\Rightarrow n$ impair.*
2. *Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\forall \epsilon > 0, a < \epsilon \Rightarrow a = 0$.*

4 Équivalence

4.1 Définitions et démonstrations

Définition 8. Deux propositions P et Q sont équivalentes si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On note alors $P \Leftrightarrow Q$ (ou $Q \Leftrightarrow P$).

Le symbole $\Leftrightarrow$ ne doit pas être utilisé au milieu d'une phrase en français pour remplacer une expression du type "ce qui est équivalent" ou "ce qui se réécrit". Au pire l'examinateur va être énervé de votre paresse, au pire vous allez écrire quelque chose de faux.

Lorsque P et Q sont équivalentes, P est une condition nécessaire de Q et également une condition suffisante. On dit que c'est une condition nécessaire et suffisante (CNS) de Q. On dit aussi que P est vraie si et seulement (ssi) Q est vraie.

Proposition 7.
Si $P_1 \Leftrightarrow P_2$, $P_2 \Leftrightarrow P_3$, $\ldots$, $P_{m-1} \Leftrightarrow P_m$ alors $P_1 \Leftrightarrow P_m$.

Pour montrer une équivalence, on peut raisonner par double implication ou par équivalence.

Méthode 4.
Pour montrer $P \Leftrightarrow Q$, on peut :

- Supposer P vraie et montrer que Q l'est (ce qui montre $P \Rightarrow Q$) puis supposer Q vraie et montrer que P l'est (ce qui montre $Q \Rightarrow P$).
- Montrer que P est équivalente à P_1, qui est équivalente à P_2, $\ldots$, qui est équivalente à P_n, qui est équivalente à Q. On aura alors montré que $P \Leftrightarrow Q$.

⚠ On ne suppose rien sur la valeur de vérité de P !

Exemples 22.

1. *Montrer que $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{C}, z = \dfrac{\overline{a}}{a}$ (double implication)*
2. *Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geqslant 0$ (raisonnement direct)*

4.2 Équivalence de plusieurs propositions

Pour montrer l'équivalence de 3 propositions (ou plus !) il suffit de montrer 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 3) et 3) $\Rightarrow$ 1) ou 1) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 2) et 2) $\Rightarrow$ 1).

Exemple 23. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence entre $z \in \mathbb{R}$, $|z+i| = |z-i|$ et $z = \overline{z}$.*

4.3 Raisonnement par équivalence

On peut utiliser des équivalences pour montrer une assertion. L'idée est la suivante: Pour montrer que P est vraie, on va montrer qu'elle est équivalente à une assertion Q que l'on sait être vraie. On aura alors $P \Leftrightarrow Q$ et Q vraie ce qui impose P vraie.
Exemples 24.

1. *montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \geqslant 0$.*
2. *Montrer, sans calculatrice, $2\sqrt{3} \geqslant \sqrt{10}$.*

Exercice 1. Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $ab \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$.

5 Le raisonnement par récurrence

5.1 Récurrence simple

Proposition 8.
On considère une proposition $HR(n)$ dépendant d'un entier n. Si $HR(n_0)$ est vraie et si pour tout $n \geqslant n_0$, on a $HR(n) \Rightarrow HR(n+1)$, alors $HR(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Soigner la rédaction !!

- Pour tout $n \geqslant n_0$, on pose $HR(n)$: " .... ".
- Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant n_0$, $HR(n)$.
- Initialisation : *démonstration de $HR(n_0)$*. La propriété est vraie au rang n_0.
- Hérédité: Soit $n \geqslant n_0$ tel que $HR(n)$ vraie, montrons que $HR(n+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire *traduire $HR(n+1)$ en remplaçant bien n par $n+1$ partout où il apparaît.*
  Démonstration de $HR(n+1)$.
  La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est donc héréditaire.
- Par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \geqslant n_0, HR(n)$.

Erreur de rédaction à éviter: supposer que pour tout n, $HR(n)$!
Exemples 25.

1. *montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $5^n \geqslant 4^n + 3^n$.*
2. *Montrer que $4^n - 1$ est divisible par 3.*
3. *Montrer que la somme des entiers de 1 à n vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

5.2 Récurrence double

Proposition 9.
On considère une proposition $HR(n)$ dépendant d'un entier n. Si $HR(n_0)$ est vraie et si pour tout $n \geqslant n_0$, on a $(HR(n) \cap HR(n+1)) \Rightarrow HR(n+2)$, alors $HR(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Rédaction:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $HR(n)$: " .... ".
- Montrons, par récurrence double sur n, que pour tout $n \geqslant n_0$, $HR(n)$.
- Initialisation : *démonstration de $HR(n_0)$ et de $HR(n_0+1)$.* La propriété est vraie aux rangs n_0 et n_0+1.
- Hérédité: Soit $n \geqslant n_0$ tel que $HR(n)$ et $HR(n+1)$ vraies, montrons que $HR(n+2)$ l'est aussi, c'est-à-dire *traduire $HR(n+2)$ en remplaçant bien n par $n+2$ partout où il apparaît. Démonstration de $HR(n+2)$.*
  La propriété est vraie au rang $n+2$, elle est donc héréditaire.
- Par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \geqslant n_0, HR(n)$.

Variante : pour l'hérédité, soit $n > n_0$ tel que $HR(n-1)$ et $HR(n)$ vraies et on montre $HR(n+1)$ vraie.

Exemple 26. *On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = -2u_n + 3u_{n+1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$.*

5.3 Récurrence forte

Proposition 10.
On considère une proposition $HR(n)$ dépendant d'un entier n. Si $HR(n_0)$ est vraie et si pour tout $n \geqslant n_0$, on a $(\forall n_0 \leqslant k \leqslant n,\ HR(k)) \Rightarrow HR(n+1)$, alors $HR(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

On utilise ce genre de raisonnement quand on sait que le rang juste avant ne suffit pas à montrer celui après (ce qui exclut une récurrence simple) mais soit on ne sait pas lequel est nécessaire, soit plusieurs rangs inférieurs sont nécessaires).

Rédaction:

- Pour tout $n \geqslant n_0$, on pose $HR(n)$: " .... ".
- Montrons par récurrence forte sur n que pour tout $n \geqslant n_0$, $HR(n)$.
- Initialisation : *démonstration de $HR(n_0)$.* La propriété est vraie au rang n_0.
- Hérédité: Soit $n \geqslant n_0$. On suppose $HR(k)$ vraie pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]$, montrons que $HR(n+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire *traduire $HR(n+1)$ en remplaçant bien n par $n+1$ partout où il apparaît.*
  Démonstration de $HR(n+1)$.
  La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est donc héréditaire.
- Par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \geqslant n_0, HR(n)$.

Exemples 27.

1. *Montrer qu'une plaquette de chocolat contenant n carrés nécessite $n-1$ coups pour être entièrement réduite en carrés individuels.*
2. *Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.*
3. *Montrer que tout entier naturel non nul s'écrit sous la forme $2^n(2q+1)$, avec n et q entiers.*