Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
Feuille 3

TD n3 : Calculs algébriques.

classique   demande réflexion

1 Manipulation et majoration de sommes

Exercice 1.
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x_k = n(n+2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer les valeurs de

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{6} x_k$
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} x_k$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{2n} x_k$
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} 2x_k$
5. $S_5 = \sum_{k=n+1}^{2n} x_k$

Exercice 2.

1. Écrire la somme des entiers impairs compris entre 1 et 777 inclus à l'aide du symbole $\sum$ et la calculer.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$.

Exercice 3.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire l'expression $U_n = 1 - 2x + 4x^2 + \cdots + (-1)^n 2^n x^n$ à l'aide du signe $\sum$ et la calculer.

2 Changement d'indice

Exercice 4.
On pose $S = \sum_{k=m}^{n} k$.

1. Faites un changement d'indices en conservant les mêmes bornes.
2. Retrouvez l'expression de S en calculant $2S$.

Exercice 5.
Soit $S = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^2$. Faites un changement de variables dans S tel que :

1. La somme varie de 0 à $n-1$.
2. La somme soit comptée à l'envers avec les mêmes bornes.
3. La somme soit comptée à l'envers et commence à $k = 0$.

3 Somme et produit particuliers

Exercice 6.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} 3^{1-k}$.

Exercice 7.
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\prod_{k=0}^{n} 2^k$.

Exercice 8.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} (5n+3-k)$.

Exercice 9.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

4 Sommes doubles

Exercice 10.
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} \sum_{k=0}^{p} 2^k$$

Exercice 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)$.

Exercice 13.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{p=0}^{k} p$.

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{p=0}^{k} k$

Exercice 15.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{p=0}^{k} n$.

Exercice 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{i+j\leqslant n} i$.

Exercice 17.

Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels vérifiant : $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = n$, et $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = n$. Prouver que $x_k = 1$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$.

5 Somme et produit télescopiques

Exercice 18.

Simplifier le produit $\prod\limits_{k=3}^{31} \dfrac{2k-1}{2k+1}$ et l'écrire sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 19.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

6 Binôme de Newton et coefficients binomiaux

Exercice 21.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{1-k}$.

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

Exercice 23.

Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_{n-k}$. Donner une expression de α_n en fonction de $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$.

Exercice 24.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n \\ j \text{ pair}}} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$ et $\sum\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n \\ j \text{ impair}}} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$.

7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 25.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ka}{n}}$.

1. Expliciter V_1 et V_2.
2. Calculer V_n .

Exercice 26.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire le nombre $1,11\dots1$ (avec n chiffres après la virgule) sous la forme d'une somme de termes d'une suite géométrique et calculer cette somme. En faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire que le nombre $1,11\dots$ (avec une " infinité ", de chiffres après la virgule) est rationnel et l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Même question avec $0,99\dots9$.

Exercice 27.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $S = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 - 2\sum\limits_{k=0}^{n+1} k(k+1)$.

Exercice 28.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod\limits_{k=0}^{n} (2n-4+k)$

Exercice 29.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (2i-j)$.

Exercice 30.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{i+j<n} (i+j)$.

Exercice 31.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$.

Exercice 32.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4$.

1. Calculer cette somme en remarquant qu'elle est télescopique.
2. Exprimer cette somme en fonction de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ en développant son terme général.
3. En déduire une expression de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 33.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k k!$.

Exercice 34.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin \frac{1}{k(k+1)}}{\cos \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1}}$.

Exercice 35.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 36.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$.

Exercice 37.
Soit $(n,p,k) \in \mathbb{N}^3$ avec $k \leqslant p \leqslant n$. Montrer que $\dbinom{n}{p}\dbinom{p}{k} = \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{p-k}$.

Exercice 38.
Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que $(1{,}01)^{100} > 2$.

Exercice 39.
Soient $k \leqslant n$ deux entiers, montrer que $\dfrac{n+1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k+1}$.

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 40.

1. Montrer que $\dfrac{1}{n^{k-1}}\dbinom{n}{k-1} - \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide du résultat $\sum\limits_{k=0}^{m} k\binom{m}{k}x^{k-1} = m(1+x)^{m-1}$ vu en cours.

Exercice 41.

1. Montrer que si (α_i) est une famille d'entiers et a un réel, alors :
$$\prod_{i=1}^{n} a^{\alpha_i} = a^{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$$
2. Calculer la valeur de $\prod\limits_{i+j \leqslant n} a^i b^j$ pour a et b réels.
3. Calculer $\prod\limits_{i+j \leqslant n} a^i$.
4. Retrouver la valeur de $\prod\limits_{i+j \leqslant n} a^i b^j$ pour a et b réels.

Exercice 42.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod\limits_{k=1}^{n} (3k+1)(3k-1)$.

Exercice 43.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ $2n$ réels tels que :
$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_2 \leqslant \dots \leqslant y_n.$$
Montrer que : $\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.
On pourra examiner la quantité : $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$.

Exercice 44.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \sin 1 \sin(k+1)$

Exercice 45. ⚙⚙

1. Soit une famille de réels $(s_{i\,j})_{i\in[\![1,n]\!],\, j\in[\![1,n]\!]}$ tels que $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!]$, $s_{i\,j} = s_{j\,i}$, et $s_{i\,i} = 0$.
   Montrer que : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} s_{i\,j} = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{i\,j}$.
2. En déduire que si $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ sont deux familles de réels :
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

   Remarque : cette inégalité peut aussi se démontrer directement par récurrence.

Mémo

— Comment effectuer un changement d'indice ?
On pose le changement d'indice, on détermine les nouvelles bornes de cet indice puis on exprime le terme général en fonction du nouvel indice.

— Comment additionner deux sommes/multiplier deux produits ?
On se ramène à des bornes identiques, quitte à enlever des termes extrêmes.

— Comment permuter deux signes sommes/produits ?
Si les bornes ne dépendent pas des indices, on les permute sans rien changer. Sinon, il faut permuter le rôle des indices pour déterminer les bornes des deux sommes.

— Comment calculer une somme avec des coefficients binomiaux ?
Selon la somme, on fait apparaître la formule du binôme de Newton ou on utilise les relations du cours sur les coefficients binomiaux.

— Comment simplifier une expression avec des factorielles ?
Il faut revenir à la définition de la factorielle en tant que produit.

— Comment déterminer les coefficients binomiaux pour de petites puissances ?
il faut utiliser le triangle de Pascal.

Correction du TD n 3

Correction 1

1. $S_1 = 48$.
2. $S_2 = (n+1)(n+3)$.
3. $S_3 = 2n(2n+2) = 4n(n+1)$
4. $S_4 = 2n(n+2)$.
5. $S_5 = S_3 - \sum_{k=0}^{n} x_k = 4n(n+1) - n(n+2) = n(3n+2)$.

Correction 2

1. Cette somme s'écrit $\sum_{k=0}^{388}(2k+1)$. On la calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{388}(2k+1) &= 2\sum_{k=0}^{388}k + \sum_{k=0}^{388}1 \\ &= 388 \times 389 + 389 \\ &= 389^2\end{aligned}$$

2. On procède comme ci-dessus :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) &= 2\sum_{k=0}^{n-1}k + \sum_{k=0}^{n-1}1 \\ &= (n-1)n + n \\ &= n^2\end{aligned}$$

Correction 3

On écrit

$$\begin{aligned}U_n &= \sum_{k=0}^{n}(-2x)^k \\ &= \frac{1-(-2x)^{n+1}}{1+2x}\end{aligned}$$

Correction 4

1. On pose $j = n+m-k$, alors si k varie de m à n, j varie de n à m. On remplace k par $n+m-j$. On a donc, en remettant les bornes dans l'ordre croissant :

$$S = \sum_{j=m}^{n}(n+m-j).$$

2. D'après la question précédente, on a $S = \sum_{k=m}^{n}(n+m-k)$ car j est une variable muette donc, en sommant les deux expressions connues de S, on a :

$$\begin{aligned}2S &= \sum_{k=m}^{n}(n+m-k) + \sum_{k=m}^{n}k \\ &= \sum_{k=m}^{n}(n+m) \\ &= (n+m)(n-m+1).\text{car la somme possède } n+m-1 \text{ termes}\end{aligned}$$

On en déduit que $S = \dfrac{(n+m)(n-m+1)}{2}$.

Correction 5

1. On pose $j = k-1$. k varie de 1 à n donc j varie de 0 à $n-1$. On a donc : $S = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 = \sum_{j=0}^{n-1}(n-j)^2$.

2. On pose $j = n+1-k$. k varie de 1 à n donc j varie de n à 1. On a donc : $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 = \sum_{j=1}^{n}j^2$.

3. On pose $j = n-k$. k varie de 1 à n donc j varie de $n-1$ à 0. On a donc : $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^2$.

Correction 6

On a $\sum_{k=0}^{n}3^{1-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{3}{3^k} = 3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$.

On utilise ensuite la formule de la somme géométrique :

$$3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} = 3\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}1-\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}\left(1-3^{-(n+1)}\right).$$

Correction 7 On a $\prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=0}^{n} k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Correction 8 On pose $j = 5n+3-k$. Quand k vaut 1, j vaut $5n+2$, quand k vaut n, j vaut $4n+3$. On a donc :

$$\prod_{k=1}^{n}(5n+3-k) = \prod_{j=4n+3}^{5n+2} j = \frac{\prod_{j=1}^{5n+2} j}{\prod_{j=1}^{4n+2} j} = \frac{(5n+2)!}{(4n+2)!}.$$

Correction 9 On sait que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k! \leqslant n!$ donc, par sommation des inégalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant n.n! \leqslant (n+1).n!.$$

On a donc bien l'inégalité souhaitée puisque $(n+1).n! = (n+1)!$

Correction 10 On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q}\sum_{k=0}^{p} 2^k &= \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q}\left(2^{p+1}-1\right)\\
&= \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q} 2^{p+1} - \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q} 1\\
&= \sum_{q=0}^{n} 2(2^{q+1}-1) - \sum_{q=0}^{n}(q+1)\\
&= \sum_{q=0}^{n} 2^{q+2} - \sum_{q=0}^{n} 2 - \sum_{q=0}^{n} q - \sum_{q=0}^{n} 1\\
&= 4(2^{n+1}-1) - 3(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}\\
&= 2^{n+3} - 4 - \frac{(n+1)(n+6)}{2}
\end{aligned}$$

Correction 11 On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k\\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{2^{n-j+1}-1}{2-1}\\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j\\
&= n2^{n+1} - 2(2^n-1)\\
&= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$

Correction 12 On coupe la somme en deux :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j.$$

On a :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

De même,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

On a donc :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = n^2(n+1).$$

Remarque. On peut aussi dire que i et j jouent des rôles symétriques pour justifier l'égalité des deux sommes.

Correction 13 On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} p &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} \text{en utilisant les formules du cours}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} p = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Correction 14 On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} k = \sum_{k=1}^{n} k(k+1).$$

On reconnaît la somme calculée dans l'exercice 13. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Correction 15 On a

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} n = \sum_{k=1}^{n} n(k+1) = n\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n^2(n+3)}{2}$$

Correction 16 On pose $k = i + j$. L'entier k varie de 0 à n, $j = k - i$ et i varie donc de 0 à k (car i est forcément plus petit que $i + j$). On a donc :

$$\sum_{i+j\leqslant n} i = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} i = \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k.$$

On a donc :

$$\sum_{i+j\leqslant n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+4}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Correction 17 Nous allons calculer la somme $S = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i - x_j)^2$. On développe son terme général :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i^2 - 2x_ix_j + x_j^2) \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_j^2 \end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{j=1}^{n} n = n^2.$$

De même, $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_j^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{i=1}^{n} n = n^2$. Quant à la somme du milieu, elle est égale à

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_ix_j = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = n^2.$$

On en déduit que $S = 0$. Or, c'est la somme de carrés réels donc positifs, ils sont donc tous nuls. On en déduit que les réels sont tous égaux et, comme leur somme vaut n, ils sont tous égaux à 1.

Correction 18 On écrit

$$\begin{aligned} \prod_{k=3}^{31}\frac{2k-1}{2k+1} &= \prod_{k=3}^{31}\frac{2(k-1)+1}{2k+1} \\ &= \frac{5}{63} \end{aligned}$$

Correction 19 On écrit $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. On reconnaît alors une somme télescopique, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Correction 20 On écrit $\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}$. On reconnaît alors un produit télescopique, on a donc :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

Correction 21 On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{1-k} &= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{-k}1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{1-k}\text{par la formule du binôme de Newton} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}+1\right)^n \\ &= \frac{3^n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{1-k}=\frac{3^n}{2^{n-1}}.$$

Correction 22 On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^k &= -1+\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^k\\ &= -1+\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k}\\ &= -1+(1-1)^n \text{par la formule du binôme de Newton}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=-1.$$

Correction 23 On a :

$$\alpha_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k}=\alpha_n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k},$$

d'où

$$0=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k}=n\alpha_{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k}.$$

On en déduit que :

$$\alpha_{n-1}=-\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\alpha_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}\alpha_{n+1-k}.$$

Correction 24 D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},$$

et

$$0=((-1)+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k.$$

En additionnant les deux, on obtient :

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^k\right).$$

Or, dans cette somme, les termes correspondants à k impair sont nuls. On a donc :

$$2^n=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^k\right)=2\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}.$$

On en déduit que :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}=2^{n-1}.$$

On écrit ensuite :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\tbinom{n}{2k+1} &= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ impair}}}\tbinom{n}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\tbinom{n}{k}-\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}\tbinom{n}{k}\\ &= 2^n-2^{n-1}\\ &= 2^{n-1}\end{aligned}.$$

Ainsi, on a montré que :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}=\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}.$$

Correction 25

1. On a $V_1=1$ et $V_2=1+ea/n$.
2. On écrit

$$\begin{aligned}V_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{a/n}\right)^k\\ &= \frac{e^a-1}{e^{a/n}-1}\end{aligned}$$

Correction 26

1. Le nombre s'écrit
$$\sum_{k=0}^{n} 10^{-k}$$
Il vaut
$$\sum_{k=0}^{n} 10^{-k} = \frac{1-10^{-(n+1)}}{1-10^{-1}} = \frac{1-10^{-(n+1)}}{0.9}$$
Lorsque n tend vers l'infini, on obtient
$$1,1111\ldots = \frac{1}{0.9} = \frac{10}{9}$$
2. On commence par écrire le nombre $0.999\ldots 9$ avec n chiffres après la virgule. Il vaut
$$\sum_{k=1}^{n} 9.10^{-k} = 0.9\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1-10^{-n}$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient
$$0.99999\ldots = 1$$

Correction 27

On écrit :
$$\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 + \underbrace{(n+2)^2}_{k=n+1},$$
et
$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + \underbrace{0(0+1)}_{k=0} + \underbrace{(n+1)(n+2)}_{k=n+1}.$$
On a alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2 - 2\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+(k+1)^2-2k(k+1)\right) + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) - n(n+2)\\ &= n - n(n+2)\end{aligned}$$
On en déduit que :
$$S = -n(n+1).$$

Correction 28 On pose $j = 2n-4+k$. Quand k vaut 0, j vaut $2n-4$, quand k vaut n, j vaut $2n-4$. On a donc :
$$\prod_{k=0}^{n}(2n-4+k) = \prod_{j=2n-4}^{3n-4} j = \frac{\prod_{j=1}^{3n-4} j}{\prod_{j=1}^{2n-5} j} = \frac{(3n-4)!}{(2n-5)!}.$$

Correction 29 On écrit :
$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(2i-j) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2i - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2i - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i \text{car les deux variables sont muettes}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\\ &= \sum_{i=1}^{n} ni\\ &= \frac{n^2(n+1)}{2}\end{aligned}$$
On a donc $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(2i-j) = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

Correction 30 On écrit $\sum_{i+j<n}(i+j) = \sum_{i+j<n} i + \sum_{i+j<n} j = 2\sum_{i+j<n} i$ car i et j ont des rôles symétriques dans les deux sommes. On pose $k = i+j$. Comme $k<n$, il varie de 0 à $n-1$ et i varie de 0 à k. On a donc :
$$\sum_{i+j<n}(i+j) = 2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} i = 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} k.$$
On a donc :
$$\sum_{i+j<n}(i+j) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

Correction 31 On coupe la somme en deux :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\min(i,j)+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\min(i,j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} j\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}+\sum_{i=2}^{n}\frac{i(i-1)}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j-1)}{2} \text{car } i \text{ est une variable muette}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{en utilisant la formule trouvée à l'exercice ??}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Remarque. On a calculé $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$ en cours, on peut vérifier que

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)=n^2(n+1).$$

Correction 32

1. D'après la formule de la somme télescopique, on a :

$$S_n=(n+1)^4-1=n^4+4n^3+6n^2+4n.$$

2. On écrit :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4\right)\\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\
&= 4\left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right)+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n \text{en utilisant la formule du cours}
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=S_n-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n.$$

En utilisant l'expression de S_n trouvée à la première question, on trouve :

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=n^4+4n^3+6n^2+4n+1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n=n^4+2n^3+n^2,$$

ce qui, après factorisation, donne :

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Correction 33

On écrit $kk!=(k+1-1).k!=(k+1)!-k!$. On reconnaît alors une somme télescopique d'où :

$$\sum_{k=1}^{n}kk!=\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-k!=(n+1)!-1.$$

Correction 34

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac1k\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac1k\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{k+1}\right)\cos\left(\frac1k\right)}{\cos\left(\frac1k\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac1k\right)}{\cos\left(\frac1k\right)}-\frac{\left(\sin\frac{1}{k+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}
\end{aligned}.$$

On reconnaît une somme télescopique, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac1k\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}=\tan(1)-\tan\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Correction 35

On écrit : $\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} &= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\\ &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\end{aligned}$. On reconnaît deux produits télescopiques, on a donc : $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2}\times\frac1n=\frac{n+1}{2n}$.

Correction 36

On écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)-\binom{n}{n}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}\right)-\binom{n}{n}\\ &= 2^n-1 \text{par la formule du binôme de Newton}\end{aligned}$$

On a donc $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}=2^n-1$.

Correction 37 On a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p}\binom{p}{k} &= \frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{p!}{k!(p-k)!}\\ &= \frac{n!}{(n-p)!(p-k)!k!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!}\\ &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}\end{aligned}.$$

donc

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

Correction 38 On écrit

$$\begin{aligned}(1,01)^{100} &= (1+10^{-2})^{100}\\ &= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}10^{-2k}\end{aligned}$$

Correction 39 Il suffit de l'écrire. On a :

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{n+1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1},$$

car $(n+1)-(k+1)=n-k$.

Correction 40

1. On écrit :

$$\frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1}-\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}=\frac{1}{n^{k-1}}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}-\frac{1}{n^k}\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On a :

$$nk(n^{k-1}(k-1)!(n-k+1)!)=n^kk!(n-k+1)!$$

et

$$(n-k+1)\left(n^kk!(n-k)!\right)=n^kk!(n-k+1)!$$

donc le dénominateur commun est $\left(n^kk!(n-k+1)!\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1}-\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} &= \frac{n!(nk-(n-k+1))}{n^kk!(n-k+1)!}\\ &= \frac{n!(n+1)(k-1)}{n^kk!(n-k+1)!}\\ &= \frac{(n+1)!(k-1)}{n^kk!(n+1-k)!}\\ &= \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}\end{aligned}.$$

On a bien l'égalité souhaitée.

2. On utilise la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1}-\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\right)\\ &= \frac{1}{n^0}\binom{n}{0}-\frac{1}{n^n}\binom{n}{n}\\ &\text{car on reconnaît une somme télescopique}\\ &= \frac{n^n-1}{n^n}\end{aligned}$$

3. On écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}-\frac{n}{n^{n+1}}+1\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n+1}k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}-\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}-\frac{1}{n^n}+1\\ &= \frac{n+1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\frac{1}{n^n}+1\\ &= 1-\frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

en utilisant la formule vu en cours.

Correction 41

1. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n=1$, le résultat est clair. On suppose le résultat vrai au rang n. On a :
$$\prod_{i=1}^{n+1} a^{\alpha_i} = a^{\alpha_{n+1}} \prod_{i=1}^{n} a^{\alpha_i},$$
donc
$$\prod_{i=1}^{n+1} a^{\alpha_i} = a^{\alpha_{n+1}} a^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i},$$
par hypothèse de récurrence. On a donc :
$$\prod_{i=1}^{n+1} a^{\alpha_i} = a^{\alpha_{n+1}+\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = a^{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}.$$
Le résultat est vrai au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, il est vrai pour tout entier n.
2. On pose $k=i+j$, on a $j=i-k$. k varie alors de 0 à n et i varie de 0 à k. On a :
$$\prod_{i+j\leqslant n} a^i b^j = \prod_{k=0}^{n}\prod_{i=0}^{k} a^i b^{k-i} = \prod_{i=0}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k} a^i\right)\left(\prod_{i=0}^{k} b^{k-i}\right).$$
D'après ce qui précède, on a :
$$\prod_{i=0}^{k} a^i = a^{\sum_{i=0}^{k} i} = a^{\frac{k(k+1)}{2}},$$
et
$$\prod_{i=0}^{k} b^{k-i} = b^{\sum_{i=0}^{k} k-i} = b^{\sum_{j=0}^{k} j} = b^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$
On a donc :
$$\prod_{i+j\leqslant n} a^i b^j = \prod_{k=0}^{n} a^{\frac{k(k+1)}{2}} b^{\frac{k(k+1)}{2}} = \prod_{k=0}^{n} (ab)^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$
On applique, à nouveau, la question 1. On a donc :
$$\prod_{i+j\leqslant n} a^i b^j = (ab)^{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{2}} = (ab)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}},$$
en utilisant le résultat de l'exercice 13.
3. $$\prod_{i+j\leqslant n} a^i = \prod_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{n-i} a^i = \prod_{i=0}^{n} a^{i(n-i+1)} = a^{\sum_{i=0}^{n} i(n+1)-i}.$$
4. On écrit
$$\prod_{i+j\leqslant n} a^i b^j = \prod_{i+j\leqslant n} a^i \prod_{i+j\leqslant n} b^j,$$
On a
$$\sum_{i=0}^{n} i(n+1-i) = (n+1)\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^2 n}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$
on a donc
$$\prod_{i+j\leqslant n} a^i = a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}},$$
et, par symétrie,
$$\prod_{i+j\leqslant n} b^j = b^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \text{ d'où } \prod_{i+j\leqslant n} a^i b^j = (ab)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}.$$

Correction 42 On écrit :
$$\prod_{k=1}^{n} (3k+1)(3k-1) = \frac{\prod_{k=1}^{n} (3k+1)(3k-1)3k}{\prod_{k=1}^{n} 3k}.$$
On a $\prod_{k=1}^{n} 3k = 3^n \prod_{k=1}^{n} k = 3^n n!$.

On remarque ensuite que le produit $\prod_{k=1}^{n} (3k+1)(3k-1)3k$ correspond aux produits de tous les entiers compris entre 2 (qui correspond à $k=1$ dans $3k-1$) et $3n+1$ (qui correspond à $k=n$ dans $(3k+1)$). En effet, tout entier s'écrit de la forme $3k$, $3k-1$ ou $3k+1$. On en déduit que $\prod_{k=1}^{n} (3k+1)(3k-1)3k = (3n+1)!$ d'où $\prod_{k=1}^{n} (3k+1)(3k-1) = \dfrac{(3n+1)!}{3^n n!}$.

Correction 43 Il suffit de remarquer que la somme $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(x_i - x_j\right)\left(y_i - y_j\right)$ est positive. En effet, si $i<j$, on a le produit de deux termes positifs, si $i>j$, on a le produit de deux termes négatifs.

On développe maintenant cette somme, on a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)(y_i-y_j) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_iy_i-x_iy_j-x_jy_i+x_jy_j)\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_iy_i-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_iy_j-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_jy_i+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_jy_j\end{aligned}$$

On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_iy_i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_i=n\sum_{i=1}^n x_iy_i=n\sum_{k=1}^n x_ky_k$$

et

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_jy_j=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n x_jy_j=n\sum_{j=1}^n x_jy_j=n\sum_{k=1}^n x_ky_k.$$

De plus,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_iy_j=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right),$$

et de même,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_jy_i=\left(\sum_{i=1}^n x_j\right)\left(\sum_{j=1}^n y_i\right)=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right),$$

car i et j sont des variables muettes.

On a donc :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)(y_i-y_j)=2n\sum_{k=1}^n x_ky_k-2\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right).$$

Comme cette somme est positive, on a donc

$$n\sum_{k=1}^n x_ky_k\geqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right),$$

ce qui est le résultat souhaité.

Correction 44 On a :

$$\begin{aligned}\sin(1)\sin(k+1) &= \frac{1}{2}(\cos(k)-\cos(k+2))\\ &= \frac{1}{2}(\cos(k)-\cos(k+1)+\cos(k+1)-\cos(k+2))\end{aligned}.$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\sin(1)\sin(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}(\cos(k)-\cos(k+1))+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+2}(\cos(k+1)-\cos(k+2)).$$

On reconnaît deux sommes télescopiques, la somme vaut donc :

$$\frac{1}{2}(1-\cos(n+2)+\cos 1-\cos(n+3)).$$

Correction 45

1. Il suffit d'écrire

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}s_{ij}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}s_{ij}+\sum_{i=1}^n s_{ii}+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}s_{ij}.$$

On a $\sum_{i=1}^n s_{ii}=0$ et, comme $s_{ij}=s_{ji}$, $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}s_{ij}=\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}s_{ij}$.

Ainsi,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}s_{ij}=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}s_{ij}$$

On peut visualiser ces trois sommes en disant que l'on coupe le tableau en trois parties, la partie strictement au dessus de la diagonale ($j>i$), la diagonale ($i=j$) et la partie strictement en dessous de la diagonale ($i>j$)

2. On va calculer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_ib_j)^2-2a_ib_ja_jb_i+(a_jb_i)^2\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_ib_j)^2-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}2a_ib_ja_jb_i+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_jb_i)^2\end{aligned}$$

On écrit maintenant

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_ib_j)^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i^2b_j^2=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)=\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right),$$

car i et j sont des indices muets.

De même, on a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_jb_i)^2=\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

On s'intéresse maintenant à la somme du milieu. On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}2a_ib_ja_jb_i=2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ib_ia_jb_j=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)\left(\sum_{j=1}^n a_jb_j\right).$$

Or

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

car i et j sont des indices muets. On a donc :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

On utilise maintenant la question 1. En effet, en posant $s_{ij} = (a_i b_j - a_j b_i)^2$, on a bien $s_{ii} = 0$ et $s_{ij} = s_{ji}$ donc on peut appliquer la question 1. On a donc

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

On en déduit que

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2,$$

ce qui est précisément le résultat souhaité.

3. On a fait le plus dur à la question précédente !!! Il suffit de remarquer que la somme de gauche est positive car c'est une somme de carrées, on obtient alors l'inégalité souhaitée.