Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
DS 1

Devoir d'entrainement 1.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} = u_n + 3u_{n-1}$. Montrer que $u_n \leqslant 3^n$ pour tout n.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $|x-2| \leqslant 3 - |2x-1|$.

Exercice 3.

1. (a) Énoncer la définition d'une fonction croissante sur $[0,+\infty[$.
   (b) Énoncer l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f suivante est croissante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x} \end{array} \right.$$

3. Déduire des questions précédentes que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Exercice 4. Soit $z = x+iy$ un nombre complexe différent de i, on pose $Z = \dfrac{z-1+2i}{z-i}$.

1. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $Z \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $Z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$, montrer que $\dfrac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x)+f(y)| = |x+y|$$

1. On pose :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \text{ et } f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array} \right. .$$

   Montrer que f_1 et f_2 vérifient (E).
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).
   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|$$

   (c) En raisonnant par l'absurde, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)$$

3. Conclure. On précisera bien le raisonnement utilisé.

Exercice 7. Soient z et z' dans $\mathbb{C}$ tels que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$, montrer que $\left|\dfrac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right| < 1$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{cases} u_{2k} = 2u_k \\ u_{2k+1} = u_k + u_{k+1} \end{cases}$$

Déterminer une expression de la suite.

Exercice 9. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) \end{cases}$.

1. Tracer ses variations. On précisera sa limite en $+\infty$.
2. Montrer que f s'annule une seule fois sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On note α l'unique réel positif tel que $f(\alpha) = 0$.
3. Montrer que α est minoré par 1.
4. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}^+$.
5. Exprimer l'intégrale de $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.
6. On admet que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction du DS n 1

1 On raisonne par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$. La propriété $HR(n)$: "$u_n \leqslant 3^n$ est vraie aux rangs 0 et 1 car $1 \leqslant 1$ et $2 \leqslant 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $HR(n)$ et $HR(n+1)$ sont vraies, montrons que $HR(n+2)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 3u_n \\ &\leqslant 3^{n+1} + 3.3^n \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2.3^{n+1} \\ &\leqslant 3^{n+2} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+2$.

Par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3^n$.

Attention, pour une récurrence double, il est nécessaire d'initialiser aux rangs 0 *et* 1. *Si vous décidez de faire une récurrence forte et que vous initialisez au rang* 0, *vous prenez ensuite un entier* $n \geqslant 0$ *et vous supposez que pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $HR(k)$ *est vraie. Pour montrer que* $HR(n+1)$ *est vraie, vous allez écrire* $u_{n+1} = u_n + 3u_{n-1}$ *ce qui n'a de sens que si n vaut au moins 1. Et c'est là que le bas blesse si vous n'avez pas montré* $HR(1)$ *!*
Attention à bien faire apparaître l'argument qui montre l'hérédité (même si je suis d'accord qu'il est simple ici puisqu'on utilise uniquement $2 \leqslant 3$*). En effet, comme vous savez ce que vous voulez montrer, vous pourriez tenter un coup de bluff et dans le doute, on ne vous mettra pas la totalité des points.*

2 On raisonne par disjonction de cas :

— Si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, alors $|2x-1| = 1-2x$ et $|x-2| = 2-x$, on a donc

$$\begin{aligned} |x-2| \leqslant 3 - |2x-1| &\Leftrightarrow 2 - x \leqslant 3 - (1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2 - x \leqslant 2 + 2x \\ &\Leftrightarrow 3x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ car } x \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

— Si $x \in \left]\frac{1}{2}, 2\right]$, alors $|2x-1| = 2x-1$ et $|x-2| = 2-x$, on a donc 7

$$\begin{aligned} |x-2| \leqslant 3 - |2x-1| &\Leftrightarrow 2 - x \leqslant 3 - (2x-1) \\ &\Leftrightarrow 2 - x \leqslant 4 - 2x \\ &\Leftrightarrow x \leqslant 2 \end{aligned}$$

— Enfin, si $x > 2$, alors $|x-2| = x-2$ et $|2x-1| = 2x-1$, on a donc

$$\begin{aligned} |x-2| \leqslant 3 - |2x-1| &\Leftrightarrow x - 2 \leqslant 3 - (2x-1) \\ &\Leftrightarrow 3x \leqslant 6 \\ &\Leftrightarrow x \leqslant 2 \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Par disjonction de cas, on a montré que l'ensemble des solutions est $[0, 2]$.

Pensez à bien raisonner par équivalence ! Si vous raisonnez par implication, il faut ensuite vérifier que les réels trouvés sont bien solutions.

3 1. (a) Une fonction est croissante si $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2$, $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$.

Pensez à dire de quoi vous donnez la définition ! Attention, on demande une fonction croissante sur $[0, +\infty[$, par sur $\mathbb{R}$.

(b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Pensez à définir x et y !

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, alors $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$. La fonction $x \mapsto 1+x$ est croissante, on en déduit que $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est décroissante puis que f est croissante.

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|,$$

d'après l'inégalité triangulaire donc, par croissance de f, on a

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} &= \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned}$$

On a donc bien l'inégalité souhaitée.

Attention à bien traduire la croissance de f par $f(|x+y|) \leqslant f(|x|+|y|)$ et pas $f(|x+y|) \leqslant f(|x|) + f(|y|)$.

4 1. On peut raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow Z = \overline{Z} \\ &\Leftrightarrow (z-1+2i)(\overline{z}+i) = (\overline{z}-1-2i)(z-i) \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - \overline{z} + 2i\overline{z} + iz - i - 2 = |z|^2 - z - 2iz - i\overline{z} + i - 2 \\ &\Leftrightarrow z - \overline{z} + 3i(z+\overline{z}) - 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow 2iy + 6ix - 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + y = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des affixes des points de la droite d'équation $y = 1 - 3x$ privé du point de coordonnées $(0, 1)$ qui correspond à i

On peut aussi déterminer la forme algébrique de Z. On écrit

$$\begin{aligned}\frac{z-1+2i}{z-i} &= \frac{(z-1+2i)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2} \\ &= \frac{z\overline{z} + iz - \overline{z} - i + 2i\overline{z} - 2}{|z-i|^2} \\ &= \frac{x^2+y^2+ix-y-x+iy-i+2ix+2y-2}{|z-i|^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-x+y-2+i(3x+y-1)}{|z-i|^2}\end{aligned}$$

On a $\mathscr{I}m(Z) = \dfrac{3x+y-1)}{|z-i|^2}$ donc $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathscr{I}m(Z) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$ et on retrouve le même ensemble.

2. Si on a déterminé la forme algébrique de Z, c'est immédiat de trouver l'ensemble des solutions. En effet,
$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathscr{R}e(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0.$$
Pour déterminer cet ensemble, il faut faire apparaître des débuts d'identité remarquable :
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$$
ce qui se réécrit
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$
On en déduit que l'ensemble recherché est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$ privé du point de coordonnées $(0,1)$ qui correspond à i

Si on n'a pas la forme algébrique, on peut raisonner par équivalence :
$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} \quad & \Leftrightarrow Z = -\overline{Z} \\ & = |z|^2 - \overline{z} + 2i\overline{z} + iz - i - 2 = -|z|^2 + z + 2iz + i\overline{z} - i + 2 \\ & = 2|z|^2 - (z + \overline{z}) + i(\overline{z} - z) - 4 = 0 \\ & = 2|z|^2 - 2x + i(-2iy) - 4 \\ & = x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0 \end{aligned}$$
et on retombe sur la même équation.
BEAUCOUP d'erreurs de calcul sur cette question !! certains multiplient par $z+i$ et obtiennent z^2+1 au dénominateur qui n'a pas de raison d'être réel !

5 Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$. On raisonne par équivalence :
$$\begin{aligned} \frac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \quad & \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2}{2} \\ & \Leftrightarrow (b-a)^2 \leqslant 4b\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2 \text{ car } b > 0 \\ & \Leftrightarrow b - a \leqslant 2\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \text{ car les deux membres sont positifs} \\ & \Leftrightarrow 0 \leqslant b + a - 2\sqrt{ab} \\ & \Leftrightarrow 0 \leqslant \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2 \end{aligned}$$
La dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on en déduit que la première l'est aussi.

Il est impératif de bien justifier chaque équivalence !

6 1. On pose :
$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. .$$
Montrons que f_1 vérifie (E). Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$ donc
$$\left|f(x) + f(y)\right| = \left|x + y\right|$$
On a montré que la fonction f_1 vérifie la propriété (E). On pose :
$$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array} \right. .$$

Montrons que f_2 vérifie (E). Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x) = -x$ et $f(y) = -y$ donc

$$\left|f(x)+f(y)\right| = \left|-x-y\right| = \left|-(x+y)\right| = \left|x+y\right|$$

On a montré que la fonction f_2 vérifie la propriété (E).

Pensez à définir x et y avant de vous lancer dans la démonstration

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

(a) Montrons que $f(0) = 0$. On applique la propriété (E) à $x = y = 0$. On a alors $\left|2f(0)\right| = 0$ donc $f(0) = 0$.

(b) Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on applique la propriété (E) à $y = 0$:

$$\left|f(x)+f(0)\right| = |x+0|,$$

d'où $\left|f(x)\right| = |x|$ puisque l'on a vu, à la question précédente, que $f(0) = 0$.

Là encore, pensez à définir x

(c) On suppose par l'absurde que

$$(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x) \text{ et } (\exists x' \in \mathbb{R}, f(x') \neq -x')$$

On sait $\left|f(x)\right| = |x|$ donc $f(x) = \pm x$. Comme on a : $f(x) \neq x$, on en déduit que $f(x) = -x$. De même, on montre que $f(x') = x'$. On applique maintenant la propriété (E) à x et x' :

$$\left|f(x)+f(x')\right| = \left|x+x'\right|,$$

ce qui donne, en remplaçant par les expressions de $f(x)$ et $f(x')$:

$$\left|-x+x'\right| = \left|x+x'\right|.$$

On a donc $x - x' = \pm(x+x')$ ce qui implique $x = 0$ ou $x' = 0$. Or, on sait que $f(0) = 0 = -0$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur x et x'.

Par l'absurde, on a montré que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)$$

Cette question était un massacre car vous n'avez pas traduit correctement la négation de ce que vous souhaitiez montrer. $P \cup Q$ se nie en $non(P) \cap non(Q)$ ce qui signifie l'existence d'un réel qui n'est pas égal à son image ET l'existence d'un réel (qui n'a pas de raison d'être le même) dont l'image n'est pas égale à son opposé.

3. On a montré à la question 2 que si une fonction f vérifie (E), alors $f = f_1$ ou $f = f_2$ (phase d'analyse). Réciproquement, f_1 et f_2 vérifie la propriété (E) d'après la question 1. On en déduit, par analyse synthèse, que les fonctions f qui vérifient (E) sont exactement f_1 et f_2.

Beaucoup ont reconnu une analyse synthèse mais on eu du mal à me l'expliquer correctement

7 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right| < 1 &\Leftrightarrow \left|z-z'\right| < \left|1-\overline{z}z'\right| \\
&\Leftrightarrow \left|z-z'\right|^2 < \left|1-\overline{z}z'\right|^2 \text{ car les deux membres sont positifs} \\
&\Leftrightarrow (z-z')(\overline{z}-\overline{z'}) < (1-\overline{z}z')(1-z\overline{z'}) \\
&\Leftrightarrow |z|^2 - z'\overline{z} - z\overline{z'} + \left|z'\right|^2 < 1 - \overline{z}z' - z\overline{z'} + |z|^2\left|z'\right|^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < 1 - |z|^2 - \left|z'\right|^2 + |z|^2\left|z'\right|^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < (1-|z|^2)(1-\left|z'\right|^2)
\end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi et on a bien $|z-z'| < |1-\overline{z}z'|$.

On peut aussi poser $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ mais il ne faut pas se perdre ! On a $\overline{z}z' = (xx'+yy') + i(xy'-x'y)$ donc

$$\begin{aligned}
|z-z'| < |1-\overline{z}z'| &\Leftrightarrow |z-z'| < |1-\overline{z}z'| \\
&\Leftrightarrow |z-z'|^2 < |1-\overline{z}z'|^2 \text{ car les deux membres sont positifs} \\
&\Leftrightarrow (x-x')^2+(y-y')^2 < \left(1-(xx'+yy')\right)^2+(xy'-x'y)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2-2xx'+x'^2+y^2-2yy'+y'^2 < 1+(xx'+yy')^2-2(xx'+yy')+(xy'-x'y)^2 \\
&\Leftrightarrow |z|^2+|z'|^2 < 1+|zz'|^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < 1-|z|^2-|z'|^2-|z|^2|z'|^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < (1-|z|^2)(1-|z'|^2)
\end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi et on a bien $|z-z'| < |1-\overline{z}z'|$.

peu traitée ou mal traitée en utilisant une fausse inégalité triangulaire avec un signe $-$ (ou encore en m'écrivant que le quotient de deux quantités inférieures à 2 est inférieur à 1.

8 On commence par calculer les premiers termes. On a $u_2 = 2u_1 = 2$, $u_3 = u_2+u_1 = 3$, $u_4 = 2u_2 = 4$. Il semble que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$. Montrons-le par récurrence forte sur n. On pose $HR(n)$: "$u_n = n$". La propriété est vraie au rang 1. Soit maintenant un entier $n \geqslant 1$ tel que $\forall k \in [\![1,n]\!], HR(k)$ est vraie, montrons que $HR(n+1)$ est vraie. On raisonne par disjonction de cas :

— Si $n+1$ est pair, $n+1 = 2q$ avec q un entier. On a alors $q = \dfrac{n+1}{2} < n+1$ donc $q \in [\![1,n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, $u_q = q$ donc $u_{n+1} = 2u_q = 2q = n+1$.

— Si $n+1$ est impair, alors $n+1 = 2q+1$ et $u_{n+1} = u_q + u_{q+1}$. Or $2q \leqslant n$ et $2q+1 \geqslant 2$ donc $q \in [\![1,n]\!]$ et $q \leqslant \dfrac{n}{2} < n$ donc $q+1 \leqslant n$. On peut donc bien appliquer l'hypothèse de récurrence aux rangs q et $q+1$. On a alors
$$u_{n+1} = q+q+1 = 2q+1 = n+1,$$
et la propriété est vraie

On a montré que pour $HR(n+1)$ est vraie, par disjonction de cas. La propriété est initialisée et héréditaire donc, par le principe de récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$.

La plupart d'entre vous a trouvé la formule à trouver, la rédaction de la récurrence forte a été parfois confuse.

9 1. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = 2 - \dfrac{2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$ donc $f'(x) = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. On en déduit que $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0
$f'(x)$	
f	0

En effet, $\forall x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{2}{1+\frac{1}{x^2}} - \ln(1+x^2)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Il n'est pas nécessaire de calculer le discriminant pour trouver les racines de x^2-1, il n'est pas non plus nécessaire de poser un tableau de signe pour un polynôme de degré 2

2. On remarque que f est continue et que $f(1) = 1-\ln(2) \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ce qui impose que $f(x)$ sera négative pour x suffisamment grand. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f

s'annule donc une fois sur $[1,+\infty[$. De plus, f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ (car $1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$), on a donc un unique point d'annulation de f sur $[1,+\infty[$. Par ailleurs, f est strictement positive sur $[0,1]$. On en déduit que f s'annule en un unique point α sur $\mathbb{R}^+$.

On y reviendra mais le TVI ne donne pas l'unicité! Pour avoir tous les points, il fallait f continue, f strictement décroissante, et traiter le cas $]0,1]$. Oubliez l'argument " continue car dérivable" car si vous savez qu'elle est dérivable en tant que quotient/produit/somme de fonctions dérivables, elle est continue en tant que quotient/produit/somme de fonctions continues, pourquoi invoquez la dérivabilité?

3. D'après l'étude faite à la question précédente, $f(x)$ est positive pour $x \leqslant \alpha$ et négative pour $x \geqslant \alpha$.

4. On procède par intégration par parties. On pose $u(x) = \ln(1+x^2)$ et $v'(x) = 1$. On a $u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $v(x) = x$ donc

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

peu traitée...pourquoi?

5. On écrit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} - \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{4x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} - \ln(2) \\
&= 4\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x - \ln(2) \\
&= 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \ln(2) \\
&= 4 - \ln(2) - \pi.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 - \ln(2) - \pi.$$

l'astuce du +1-1 a été vu par au moins une personne!