
Calculs algébriques

1 Sommes et produits

1.1 Sommes

1.1.1 Premières propriétés

On rappelle la définition suivante:

Définition 1. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes ou réels. Alors $\sum_{i \in I} a_i$ est la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

Par convention, si $I = \emptyset$, alors $\sum_{i \in I} a_i = 0$.

Exemples 1.

1. Si $I = [1, n]$, alors $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$

2. Si $I = [n, m]$, alors $\sum_{i=n}^m a_i = a_n + \dots + a_m$

3. On a $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in I} a_j = \sum_{k \in I} ak$

Écrire les sommes suivantes de façon symbolique (à l'aide du signe \sum) :

1. $A=2+4+6+8+10$

2. $B=1-2+3-4+5-6+7-8+9-10$

3. $C=5+7+9+\dots+23$

4. $D=8+10+\dots+24$

5. $E=1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000000}+\frac{1}{100000000}$

On peut couper une somme en deux (ou trois ..) ainsi :

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i, \text{ si } m < n,$$

En particulier, on a, pour $n \geq 1$

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \right) - a_{n+1} = \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) - a_0.$$

On peut aussi séparer les termes d'indices pairs et impairs:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ pair}}} a_i + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ impair}}} a_i$$

Proposition 1.

La somme est linéaire c'est-à-dire:

$$\bullet \sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i. \quad \left| \quad \bullet \sum_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i.$$

Méthode 1.

Comment effectuer un changement d'indice dans une somme?

- On définit un nouvel indice en fonction de l'indice de départ.
- On calcule les nouvelles bornes de la somme avec ce nouvel indice.
- On exprime le terme général de la somme à l'aide du nouvel indice.
- On écrit la nouvelle somme en ordonnant les bornes dans l'ordre croissant

Exemples 2.

1. $\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{i=0}^n a_{n-i}.$



Comme l'indice est muet, on a $\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n a_{n-j}.$

2. comment compter à l'envers la somme $\sum_{j=1}^n a_j = ?$

1.1.2 Sommes particulières

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*$.

- $\sum_{i \in I} a = na$ avec n le nombre d'éléments de I .
- $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ (somme télescopique).
- soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors

$$\sum_{k=n}^m u_k = \frac{u_n - u_{m+1}}{1 - q} = \frac{u_n (1 - q^{m-n+1})}{1 - q}$$

- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Applications:

- L'ensemble $\llbracket 0, n \rrbracket$ contient $n + 1$ éléments, on a donc $\sum_{i=0}^n 3 = 3(n + 1)$.
- Que vaut $\sum_{i=1}^n a_i - a_{i-1}$? $\sum_{i=0}^{n-1} a_i - a_{i+1}$?
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $S_n = \sum_{k=p}^n u_k$. Combien y a-t-il de termes de la suite u dans S_n ?
- Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.
- Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
- Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est convergente.

1.1.3 Sommes doubles

Définition 2. Soit (a_{ij}) une famille finie de complexes indexée par deux indices i et j variant dans deux ensembles I et J .

On appelle somme double la somme de tous les éléments de la famille. On la note :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij}.$$

On a :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}.$$

Exemple 3. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} i$

Si les bornes ne sont pas indépendantes, il faut être prudent pour permuter les signes somme dans l'expression.

Considérons par exemple l'expression $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}$. Faisons un dessin. On cherche à sommer les cellules grises du tableau suivant :

| $i \backslash j$ | 0 | 1 | ... | n |
|------------------|---|---|-----|-----|
| 0 | | | | |
| 1 | | | ... | |
| ⋮ | | | | |
| n | | | | |

Considérons maintenant exemple l'expression $\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}$.

Faisons un dessin. On cherche à sommer les cellules grises du tableau suivant :

| $i \backslash j$ | 0 | 1 | ... | $n-1$ | n |
|------------------|---|---|-----|-------|-----|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | ... | | |
| ⋮ | | | | | |
| n | | | | | |

On commence par déterminer l'intervalle maximal dans lequel varie j : pour $i = 1$, j atteint sa valeur maximale $n - 1$ donc j varie entre 0 et $n - 1$.

Exprimons maintenant l'intervalle, qui doit dépendre de j , dans lequel varie i . On sait que $j \leq n - i$ donc $i \leq n - j$. De plus, $i \geq 1$ donc i varie entre 1 et $n - j$. On a donc :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} a_{ij}.$$

Question: Mais pourquoi aurait-on envie de permuter deux signes sommes?

Exemple 4. Calculer $\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{j}{i}$.

Exemples 5.

1. Modéliser les termes de la somme $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij}$. Écrire ces sommes sous la forme d'une seule somme puis permuter les signes sommes.

2. Mêmes questions avec $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij}$.

3. Traiter le cas $i < j$. Faire dessin, exprimer avec deux sommes puis permuter.

4. Permuter les deux signes somme de $\sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k a_{kp}$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

1.2 Produits

1.2.1 Généralités

Définition 3. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes ou réels. Alors $\prod_{i \in I} a_i$ est le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

Par convention, si $I = \emptyset$, alors $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

Exemples 6.

1. Si $I = [1, n]$, alors $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n$

2. Si $I = [n, m]$, alors $\prod_{i=n}^m a_i = a_n a_{n+1} \dots a_m$

3. On a $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{j \in I} a_j = \prod_{k \in I} a_k$

Remarque: Comme pour la somme, on peut couper un produit en deux :

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^m a_i \times \prod_{i=m+1}^n a_i, \text{ si } m < n$$

Proposition 2.

- $\prod_{i \in I} (a_i b_i) = \prod_{i \in I} a_i \prod_{i \in I} b_i$.
- $\prod_{i \in I} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i \in I} a_i$ où n désigne le nombre d'éléments de I . En particulier, $\prod_{i \in I} a = a^n$ avec n le nombre d'éléments de I .
- $\prod_{k=m}^n \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_m}{a_{n+1}}$

Exemple 7. Soient $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = n(n-1)\dots(n-p+1)$. Combien y a-t-il de facteurs dans P_n ?

Remarque: Sommes et produits

1. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer $(a+b)(c+d)$.
2. $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_k)_{k \in [1, n]} \subset \mathbb{R}$, $(b_k)_{k \in [1, n]} \subset \mathbb{R}$, a-t-on $\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)$?
3. a-t-on $\sum_{k=1}^n (a_k b_k) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$?
4. revient-il au même de faire des produits de sommes et des sommes de produits ?

Exemple 8. Calculer $\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+2}}$.

Remarque: Comme pour les sommes, on peut définir des produits doubles.

1.2.2 Factorielle

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $n! = \prod_{k=1}^n k$.

On pose $0! = 1$.

Proposition 3.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1).n!$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq m < n$, $m \dots (n-1)n = \frac{n!}{(m-1)!}$

Exemple 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{i=1}^n 2i$. En déduire $\prod_{i=1}^n (2i+1)$.

1.2.3 Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Définition 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le coefficient binomial " k parmi n ", noté $\binom{n}{k}$, comme l'entier

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } k \leq n,$$

et

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ si } k > n.$$

Remarque:

Il ne paraît pas évident que ce nombre est un entier. Ce sera plus clair quand nous l'interpréterons comme le nombre de sous-parties d'un ensemble.

Proposition 4.

Soit $(n, k) \in (\mathbb{N})^2$ avec $k \leq n$. On a :

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (formule de Pascal).
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$, si $1 \leq k \leq n$.

Applications:

On peut montrer par récurrence sur n , que pour tout $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est entier.

Proposition 5 (Formule du binôme de Newton).

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemples 10.

1. triangle de Pascal, calcul de $(a + b)^3, (a + b)^5$.

2. Que vaut $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$?

3. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la fonction $x \mapsto (1 + x)^n$, calculer les sommes suivantes:

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

3. $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

5. $\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k+1} \binom{n}{k}$.

2. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

4. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

6. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

1. Exprimer S à l'aide du changement de variable $j = 2n + 1 - k$.

2. En déduire la valeur de $2S$ puis de S .