

Devoir surveillé 1.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

Qu'est-ce qui est faux dans le raisonnement suivant :

" On considère l'ensemble des élèves d'un lycée, montrons qu'ils ont tous les yeux de la même couleur. On prend un élève, il a les yeux de la même couleur que lui-même, la propriété est vraie pour une classe comptant un unique élève. Soit n un entier supérieur ou égal à 1, on suppose que tout groupe de n élèves a les yeux de la même couleur. On se donne un groupe de $n + 1$ élèves, que l'on ordonne de 1 à $n + 1$. On considère les n premiers ; par hypothèse de récurrence, tous ces élèves ont les yeux de la même couleur". On considère maintenant les n derniers, ils ont tous, par hypothèse de récurrence, la même couleur d'yeux. Or, les deux ensembles contiennent nécessairement un élève en commun (par exemple le deuxième), qui a donc les yeux de la même couleur que les n premiers et que les n derniers, on en déduit donc que tous les élèves ont les yeux de la même couleur."

Exercice 2.

Sur une île, on trouve deux sortes de personnes (et seulement deux) : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours. Alice, Julien, Meï, David, Émilie, Ghali et Gauthier habitent sur cette île.

- Alice déclare à Julien : « L'un d'entre nous deux au moins est un menteur ».
- Meï déclare : « Je suis menteuse ou David est sincère ».
- Gauthier déclare à Ghali et Émilie : « Nous sommes tous des menteurs ».
- Ghali déclare à Gauthier et Émilie : « Un et un seul d'entre nous est sincère ».

1. Montrer par l'*absurde* qu'Alice est sincère.
2. Qu'en est-il de Julien?
3. Montrer que Meï est sincère.
4. Qu'en est-il de David?
5. Déterminer à quelle catégorie de personnes (sincère ou menteur) appartiennent Gauthier, Ghali et Émilie.

Exercice 3.

1. Résoudre $|x + 4| < |2x - 3|$.
2. Montrer que tout nombre entier naturel non nul peut s'écrire comme la somme de puissances de 2 distinctes (par exemple : $57 = 1 + 8 + 16 + 32 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^5$). On pourra raisonner par récurrence forte sur n .

Exercice 4.

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x - f(y)) = 1 - x - y. \quad (E)$$

1. On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant (E).

(a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1 - t - f(0).$$

(b) Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + b.$$

2. Conclure.

Exercice 5.

On pose $F = \{z \in \mathbb{C}, \Im m(z) > 0\}$, $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et h la fonction définie sur par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, h(z) = i \frac{1+z}{1-z}.$$

1. Montrer que $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |h(z)| = 1$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, exprimer $\Re e(h(z))$ et $\Im m(h(z))$ en fonction de $\Im m(z)$, $|z|$ et $|1-z|$.

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $|z| = 1 \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que $z \in G \Leftrightarrow h(z) \in F$.

5. Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : h(z) = a$.

Exercice 6.

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$. On souhaite calculer cette intégrale.

1. *Première méthode*

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos^2(x)$ à l'aide de $\cos(2x)$.

(b) Déterminer la valeur de I .

2. *Deuxième méthode :*

(a) Poser le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ dans I .

(b) Calculer $2I$ puis I .

Exercice 7.

Mettre $\frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^4}$ sous forme algébrique.

Exercice 8.

Simplifier au maximum l'expression

$$\frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$$

Exercice 9. On considère la fonction suivante :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{e^x - 1}{e^x - x} \end{cases} .$$

On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f .

1. On considère la fonction suivante :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^x - x - 1 \end{cases} .$$

- (a) Déterminer les variations de g .
- (b) En déduire le signe de g .

2. On considère la fonction suivante :

$$h: \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (2-x)e^x - 1 \end{cases} .$$

- (a) Étudier la fonction h et dresser son tableau de variations.
 - (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 1$.
 - (c) Préciser, en fonction de x , le signe de $h(x)$.
3. (a) Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
- (b) Déterminer la limite en $+\infty$ de f .
 - (c) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
 - (d) Dresser le tableau de variations de f .
 - (e) En utilisant la fonction g , déterminer, suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}^+$, la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
 - (f) Tracer $\mathcal{C}$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.
4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^n (f(x) - 1) dx$.
- (a) Déterminer une primitive de f .
 - (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n .
 - (c) Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction du DS n 1

Correction 1 L'hérédité n'est valable que si $n + 1 \geq 3$ donc $n \geq 2$. En effet, il faut que les deux ensembles " n premiers" et " n derniers" aient une intersection non vide (c'est-à-dire qu'ils aient au moins un élève en commun). Comme on a initialisé à $n = 1$ (et que c'est faux à $n = 2$), le raisonnement est faux.

Correction 2

1. On suppose, par l'absurde, qu'Alice ment. Son affirmation est donc fausse. Or, si elle ment, son affirmation est vraie ce qui est absurde.
2. On sait désormais qu'Alice est sincère, elle dit donc la vérité. Par conséquent, le menteur d'entre les deux ne peut être que Julien.
3. On suppose, par l'absurde, que Meï ment. Son affirmation est donc fausse. Or, la négation de son affirmation est "je suis sincère et David ment" et cette affirmation est fausse puisque la première partie ("je suis sincère") est fausse.
4. On sait, d'après la question précédente, que Meï est sincère. On en déduit donc que c'est la deuxième partie de l'affirmation "David est sincère" qui est vraie dans l'affirmation de Meï.
5. Si Gauthier dit la vérité, l'affirmation "nous sommes tous des menteurs" est vraie, ce qui est absurde. On en déduit donc que Gauthier ment. Si Ghali ment, son affirmation est fausse : il y a donc que des menteurs ou au moins deux sincères ; Les trois amis ne peuvent tous être des menteurs, sinon l'affirmation de Gauthier serait vraie. On en déduit qu'il y a au moins deux personnes sincères ce qui impose Ghali (et Émilie) sincères. C'est absurde car on a supposé que Ghali mentait. On en déduit que Ghali dit la vérité. Son affirmation étant vraie, Émilie ne peut être sincère, c'est donc une menteuse.

Correction 3 1. On procède par disjonction de cas :

— Si $x \in \left[-4, \frac{3}{2}\right]$, alors

$$|x + 4| < |2x - 3| \Leftrightarrow x + 4 < 3 - 2x \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$$

— Si $x < -4$, alors

$$|x + 4| < |2x - 3| \Leftrightarrow -x - 4 < 3 - 2x \Leftrightarrow x < 7,$$

ce qui est toujours vrai.

— Si $x > \frac{3}{2}$, alors

$$|x + 4| < |2x - 3| \Leftrightarrow x + 4 < 2x - 3 \Leftrightarrow x > 7.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup]7, +\infty[$$

On peut également raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned} & |x + 4| < |2x - 3| \\ \Leftrightarrow & |x + 4|^2 < |2x - 3|^2 \text{ par positivité des deux membres} \\ \Leftrightarrow & x^2 + 8x + 16 < 4x^2 - 12x + 9 \\ \Leftrightarrow & 0 < 3x^2 - 20x - 7 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = 484 = 4 \times 121 = (22)^2$. On obtient les racines $-\frac{1}{3}$ et 7 et le polynôme est positif sauf entre les deux racines ce qui est cohérent avec ce que l'on vient de montrer.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $HR(n)$: " n peut s'écrire comme la somme de puissances de 2 distinctes".

Pour $n = 1$, on a $1 = 2^0$ donc le résultat est initialisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $HR(k)$ soit vraie. Montrons que $HR(n+1)$ l'est aussi. On procède par disjonction de cas :

— Si $n+1$ est pair, il s'écrit $n+1 = 2q$ avec $q \leq \frac{n+1}{2} \leq n$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à q : il existe $a_1 < \dots < a_r$ tel que $q = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_r}$. On a alors

$$n+1 = 2^{a_1+1} + \dots + 2^{a_r+1}$$

et les puissances sont bien distinctes.

— Si $n+1$ est impair, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2q+1$ donc $q \leq n$ et, à nouveau, on peut

— Si $n+1$ est pair, il s'écrit $n+1 = 2q$ avec $q \leq \frac{n+1}{2} \leq n$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à q : il existe $a_1 < \dots < a_r$ tel que $q = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_r}$. On a alors

$$n+1 = 2^{a_1+1} + \dots + 2^{a_r+1} + 1 = 2^0 + 2^{a_1+1} + \dots + 2^{a_r+1}$$

et, à nouveau, les puissances sont bien distinctes puisque l'on a $0 < a_1 + 1 < \dots < a_r + 1$.

Par le principe de récurrence forte, on a montré que la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

Beaucoup d'erreurs de rédaction dans cette question :

- Si vous posez $HR(n)$: " tout entier naturel est somme de racines distinctes", il y a deux problèmes : d'abord la phrase $HR(n)$ ne dépend pas de n , ensuite si $HR(n)$ est vraie, que reste-t-il à montrer ?
- Pour l'hérédité, certains supposent qu'il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $HR(k)$ est vraie (qu'est-ce que n ?), d'autres que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $HR(k)$ est vraie (mais qu'est-ce que n ??).
- Enfin, pour l'hérédité, il faut s'assurer que les puissances sont distinctes, ce qui est clair en faisant la disjonction de cas $n+1$ pair/impair. Si vous raisonnez avec n (donc vous faites une récurrence simple), vous devez justifier que ça marche bien si n est impair (car alors, on a déjà un 2^0 dans la somme égale à n). De même si vous posez $n+1 = a+b$, que se passe-t-il si a et b ont des puissances de 2 en commun ?

Correction 4 1. (a) Pour $y = 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x - f(0)) = 1 - x$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, alors

$$f(t) = f((t + f(0)) - f(0)) = 1 - (t + f(0)).$$

On a donc bien

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1 - t - f(0)$$

On peut aussi poser $x = f(y)$, on a donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(0) = 1 - f(y) - y,$$

d'où

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = 1 - f(0) - y,$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1 - t - f(0).$$

(b) On pose $b = 1 - f(0)$, on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + b.$$

2. La première question était la phase d'analyse, faisons maintenant la synthèse. Soit donc $b \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto b - x$, f est-elle solution de (E)? Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$f(x - f(y)) = b - (x - f(y)) = b - (x - (b - y)) = 2b - x - y,$$

On a donc f solution de (E) si et seulement si $b = \frac{1}{2}$ donc

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} - x$$

beaucoup ont reconnu une analyse/synthèse mais peu ont remarqué qu'il y avait une condition sur b pour que f soit solution

Correction 5 1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} |h(z)| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{i(1+z)}{1-z} \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow |1+z| = |1-z| \end{aligned}$$

Là on peut raisonner géométriquement et dire que c'est équivalent à ce que l'image $M(z)$ de z appartienne à la médiatrice des images de 1 et -1 , autrement dit l'axe des ordonnées. On peut aussi poser $z = a + ib$, passer aux carrés (on conserve l'équivalence) et arriver à $a = 0$.

Si vous posez $z = ib$, vous supposez l'une des deux propositions vraies ($z \in i\mathbb{R}$), vous ne montrez donc qu'une implication.

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors

$$\begin{aligned} i \frac{1+z}{1-z} &= \frac{i(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2} \\ &= \frac{i(1-\bar{z}+z-|z|^2)}{|1-z|^2} \\ &= \frac{i(1-|z|^2+2i\mathcal{I}m(z))}{|1-z|^2} \\ &= \frac{-2\mathcal{I}m(z) + i(1-|z|^2)}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \mathcal{R}e(h(z)) = \frac{-2\mathcal{I}m(z)}{|1-z|^2} \text{ et } \mathcal{I}m(h(z)) = \frac{(1-|z|^2)}{|1-z|^2}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. D'après la question précédente,

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \mathcal{I}m(h(z)) = 0 \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{R}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Toujours en utilisant la forme algébrique de $h(z)$:

$$z \in G \Leftrightarrow |z| < 1 \Leftrightarrow 1 - |z|^2 > 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}m(h(z)) > 0 \Leftrightarrow h(z) \in F.$$

5. Soit $a \in \mathbb{C}$, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} h(z) = a &\Leftrightarrow i(z+1) = a(1-z) \\ &\Leftrightarrow (i+a)z = a-i \end{aligned}$$

Si $a = -i$, l'équation n'a pas de solution. Si $a \neq -i$, elle admet une unique solution égale à $\frac{a-i}{a+i}$.

On ne divise pas par $a+i$ sans se demander AVANT si $a+i$ peut être nul!!!

Correction 6 1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$

(b) On a donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(2x) + 1}{2} \right) dx = \left[\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Si on ne connaît pas ses formules trigo, on retrouve celle-ci facilement en calculant $\cos(2x) = \cos(x+x)$. Vous n'avez donc aucune excuse. Je ne parle même pas des erreurs pour intégrer $\cos(2x)$ ou même $\frac{1}{2}$.

2. (a) On pose $u = \frac{\pi}{2} - x$, u varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0, $du = -dx$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin(u)$ donc

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2(u)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) du$$

je voulais tester si vous saviez faire un changement de variable dans une intégrale... sans commentaire.

(b) Comme u est une variable muette, on a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx$$

donc

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) dx$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc

$$2I = \frac{\pi}{2}.$$

On retrouve bien que $I = \frac{\pi}{4}$.

On a fait ça plusieurs fois déjà : on trouve une autre expression d'un objet et on le somme avec la première. Pourquoi, vous ferait-on calculer $2I$ si c'était pour faire la même manipulation que dans la première question ?

Correction 7 Il faut commencer par calculer les formes exponentielles du numérateur et du dénominateur :

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^4} = \frac{(2e^{i\pi/3})^5}{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^4} = \frac{2^5 e^{5i\pi/3}}{2^2 e^{-i\pi}} ,$$

on a donc

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^4} = 8e^{8i\pi/3} = -4 + 4i\sqrt{3}$$

Je pensais que le puissance 5 vous décourageriez et que vous chercheriez autre chose que de développer! Le plus rapide était de passer à la forme exponentielle.

Correction 8 On peut écrire

$$11 + 6\sqrt{2} = 3^2 + 6\sqrt{2} + 2 = (3 + \sqrt{2})^2$$

et

$$3 + 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = (1 + \sqrt{2})^2$$

donc

$$\frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}},$$

puis on multiplie par la quantité conjuguée pour obtenir

$$\frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2} - 1.$$

On peut aussi commencer par multiplier la quantité conjuguée :

$$\frac{11+6\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = 9-4\sqrt{2},$$

puis on écrit

$$9-4\sqrt{2} = 8-4\sqrt{2}+1 = (2\sqrt{2}-1)^2,$$

on retrouve alors

$$\frac{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2} - 1$$

Je crois que c'est l'exercice où j'ai vu le plus de bêtises! des racines qui disparaissent, des $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, on multiplie par le dénominateur pour enlever la racine (mais on obtient alors un truc affreux en haut... à reprendre donc!

Correction 9 1. On considère la fonction suivante :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - x - 1 \end{cases}.$$

(a) Pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = e^x - 1$ donc $g'(x) \geq 0$, g est donc croissante.

(b) g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) = 0$ donc g est positive.

Il est inutile de calculer la limite de g en $+\infty$

2. On considère la fonction suivante :

$$h: \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (2-x)e^x - 1 \end{cases}.$$

(a) Pour tout $x \geq 0$, $h'(x) = (1-x)e^x$ donc $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
h	0	$e-1$	$-\infty$

(b) On commence par remarquer que pour tout $x \in [0, 1]$, $h(x) > 0$, l'équation $h(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur $[0, 1]$. Par ailleurs, la fonction h est continue et $h([1, +\infty[) =]-\infty, e-1]$. Cet intervalle contient 0, 0 admet donc un antécédent par h . La fonction h étant strictement croissante sur cet intervalle, cet antécédent est unique. On a montré que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 1$.

Il ne faut pas oublier de traiter l'intervalle $[0, 1]$. Pour la rédaction, j'ai été indulgente car nous ne l'avons pas encore vu ensemble mais reprenez que le TVI ne donne pas l'unicité! Ici le raisonnement se fait en deux étapes : 0 admet un antécédent dans $[1, +\infty[$ et cet antécédent est unique par stricte monotonie de la fonction.

(c) On a $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \alpha$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Alors $g(x) \geq 0$ donc $e^x - x \geq 1$. On en déduit que le dénominateur de f ne s'annule pas, elle est donc bien définie.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on écrit

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{1 - 1/e^x}{1 - x/e^x}.$$

Par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

(c) La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \geq 0$, on a $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.

(d) D'après l'étude de signe de h , on a

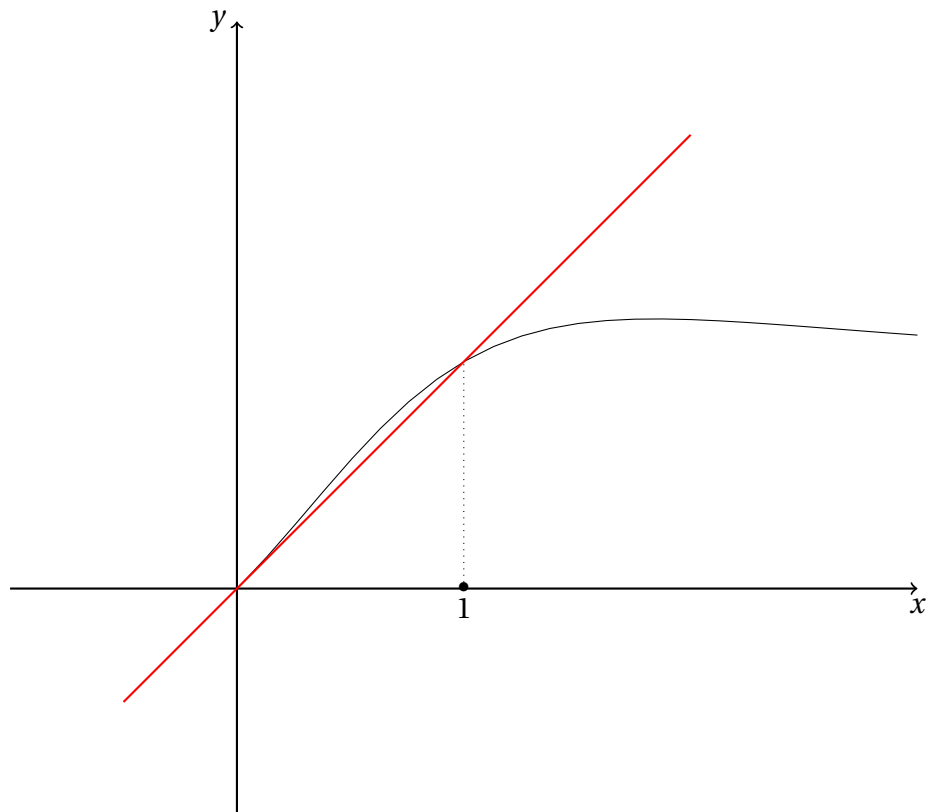
x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$f(\alpha)$	1

(e) On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) \geq x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} \geq x \\ &\Leftrightarrow (g(x) + x) \geq (g(x) + 1)x \\ &\Leftrightarrow (1 - x)g(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 1 \text{ car } g \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la courbe est au-dessus de la droite $y = x$ pour $x \leq 1$ puis au-dessous.

(f) On a le dessin suivant :



Tracer $\mathcal{C}$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^n (f(x) - 1) \, dx$.

(a) Une primitive de f est $x \mapsto \ln(e^x - x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x - x > 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \ln(e^n - n) - n$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$u_n = \ln(e^n - n) - \ln(e^n) = \ln\left(\frac{e^n - n}{e^n}\right) = \ln(1 - ne^{-n})$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ car, par croissances comparées, on a $\lim ne^{-n} = 0$.