Lycée du Parc
PCSI 842
Feuille 4

Année 2024-2025

TD 4 : Ensembles et applications.

classique   demande réflexion

1 Relations entre ensembles

Exercice 1.

Montrer les égalités suivantes :

$$]-1,1[=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right] \text{ et } [-1,1]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star}\left]-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[$$

Exercice 2.
Soit E un ensemble. Montrer par un raisonnement direct puis par contraposée l'assertion suivante :
$\forall (A,B)\in\mathscr{P}(E)^2,\quad (A\cap B=A\cup B)\Leftrightarrow A=B,$

Exercice 3.
Montrer que $\{z\in\mathbb{C}, |z+i|=|z-i|\}=\mathbb{R}$.

2 Images directe et réciproque par une application

Exercice 4.
Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f: x\mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants :
$f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1]\cup[-2,1])$ et $f([-3,-1]\cap[-2,1])$.
2. Déterminer les ensembles suivants :
$f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2]\cap[1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,1]\cup[2,+\infty[)$.

3 Détermination des propriétés d'une fonction

Exercice 5.
Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

1. $f_1:\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x+\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$.
2. $f_2:\left\{\begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x+\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$.
3. $f_3:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,-2x+2y)\end{array}\right.$

Exercice 6.
Soit $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$. Est-elle injective ? surjective ?

Exercice 7.
Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ telle que $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{sinon.}\end{cases}$
Démontrer que $f\circ f=id$. Que peut-on en déduire sur f ?

4 Bijection induite et réciproque

Exercice 8.
On considère l'application $f:\left\{\begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2-4x+8}\end{array}\right.$ Montrer que f est injective.
En déduire que f induit une bijection $\tilde{f}$ sur un intervalle qu'on précisera et préciser la bijection réciproque de $\tilde{f}$.

Exercice 9.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R})=[-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g:\left\{\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}\right.$. est une bijection.
4. Retrouver le résultat des deux questions précédentes en étudiant les variations de f.

Exercice 10.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

1. Montrer que f induit une bijection $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.
2. Déterminer l'expression de $\left(\tilde{f}\right)^{-1}(y)$.

5 Exercices théoriques

Exercice 11.
Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ surjective telle que $\forall n\in\mathbb{N}, f(n)\geqslant n$, montrer que $f(0)=0$.

Exercice 12.
Soient E un ensemble et $h:E\to E$ une application. Montrer que h^2 bijective implique h bijective puis montrer que s'il existe $n\in\mathbb{N}^\star$ tel que h^n est bijective, alors h est bijective.

Exercice 13.
Soit E un ensemble et $f:E\to E$ une application telle que $f=f\circ f\circ f$. Montrer que

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective}.$$

Exercice 14.
Soit $f:X\to Y$. Montrer que pour tout $B\in\mathscr{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B))=B\cap f(X)$.

6 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 15.
Soit E un ensemble. Montrer par un raisonnement direct et par contraposée l'assertion suivante :
$\forall (A,B,C)\in\mathscr{P}(E)^3 \quad (A\cap B=A\cap C \text{ et } A\cup B=A\cup C)\Leftrightarrow B=C$.

Exercice 16.
Soit $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$, montrer que
$E\setminus(A\cup B)=(E\setminus A)\cap(E\setminus B)$ et $E\setminus(A\cap B)=(E\setminus A)\cup(E\setminus B)$.

Exercice 17.
Montrer que $i\mathbb{R}=\{z\in\mathbb{C}, |z-1|=|z+1|\}$.

Exercice 18.
Soit $z\in\mathbb{C}$, montrer que $\{z\in\mathbb{C}, \mathscr{R}e(z)=\mathscr{I}m(z)\}=\{z\in\mathbb{C}, |z-1|=|z-i.|\}$

Exercice 19.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto 2x^2+3$. Déterminer $f^{-1}([0,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,-3])$ et $f([-2,4])$.

Exercice 20.
Soit $f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\dfrac{1}{1+x^2}\end{array}\right.$.
Déterminer $f([0,1])$, $f([-3,1[)$ et $f^{-1}(]\frac14,1])$.

Exercice 21.
Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

1. $f_1:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\ (x,y)&\longmapsto&(x+2y,x-y)\end{array}\right.$
2. $f_2:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ (x,y)&\longmapsto&x-y^2\end{array}\right.$
3. $f_3:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{N}&\longrightarrow&\mathbb{Z}\\ n&\longmapsto&\left\{\begin{array}{ll}\frac{n}{2}&\text{si } n \text{ est pair}\\ -\dfrac{n+1}{2}&\text{sinon}\end{array}\right.\end{array}\right.$

Exercice 22.
Soit $f:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ telle que $x\mapsto x^2-1$. f est-elle bijective ?

Exercice 23.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer l'image de $f_n:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^{+*}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x^n\ln(x)\end{array}\right.$.

Exercice 24.
Soit $f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{N}&\to&\mathbb{N}\\ x&\mapsto&x+1\end{array}\right.$ et $g:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{N}&\to&\mathbb{N}\\ x&\mapsto&\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x=0\\ x-1 \text{ si } x\geqslant 1\end{array}\right.\end{array}\right.$

1. Ces fonctions sont-elles injectives ? surjectives ?
2. Préciser $g\circ f$ et $f\circ g$.

Exercice 25.
L'application $f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{Z}&\longrightarrow&\mathbb{Z}\\ (n,m)&\longmapsto&(n+m,n-m)\end{array}\right.$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 26.
Soit la fonction $f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}\setminus\{2\}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\dfrac{3x+5}{x-2}\end{array}\right.$.
Montrer que f induit une bijection d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans une partie B de $\mathbb{R}$. On note h la fonction induite, donner une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 27.
Soit $f:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}&\longrightarrow&\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}\\ (u,v)&\longmapsto&\left(uv,\dfrac{u}{v}\right)\end{array}\right.$ Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 28.
Soit $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $(z,z')\mapsto(2z+z',3z-z')$.Vérifier que f est bijective et donner l'expression de f^{-1}.

Exercice 29.
Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux applications et $h:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\\ x\mapsto(f(x),g(x))\end{array}\right.$

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives. h est-elle surjective ?

7 une fois qu'on est à l'aise

Exercice 30.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux sous-ensembles de E.

1. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où il n'y a pas égalité.
2. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 31.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, 2x+3y) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x+y=1\right\}$. Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$.

Exercice 32.

Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'il existe une injection $E \to \mathscr{P}(E)$.
2. Soient $f : E \to P(E)$ et $A := \{x \in E, x \notin f(x)\}$. Montrer que $A \notin \mathrm{Im}(f)$. En déduire qu'il n'existe pas de bijection $E \to \mathscr{P}(E)$.

Exercice 33.

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Montrer l'équivalence :
f surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{P}(Y), f(f^{-1}(B)) = B$.

Memo

- Comment montrer une inclusion $E \subset F$? Prendre un élément de E et montrer qu'il appartient à F.
- Comment montrer que deux ensembles sont égaux ?
  - Procéder par double inclusion
  - Raisonner par équivalence.
- Comment déterminer l'image réciproque d'un ensemble ? Appliquer la définition : déterminer les antécédents des éléments de l'ensemble.
- Comment déterminer l'image d'une fonction/ d'un ensemble ?
  - Chercher pour quel(s) Y l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions
  - Dresser son tableau de variations (dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
- Comment déterminer si une fonction est surjective ?
  - Déterminer si l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions
  - Exhiber un élément qui ne possède pas d'antécédent
  - Dresser le tableau de variations
- Comment déterminer si une fonction est injective ?
  - Prendre deux éléments ayant même image et déterminer s'ils sont nécessairement égaux.
  - Trouver deux éléments distincts ayant même image
  - Déterminer ses variations (si c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
- Comment savoir si une fonction est bijective ?
  - Étudier l'équation $f(X) = Y$
  - Exhiber l'inverse de la fonction
  - Étudier l'injectivité et la surjectivité
- Comment déterminer la bijection réciproque d'une fonction ? Résoudre $f(X) = Y$ c'est-à-dire exprimer Y en fonction de X.
- Comment montrer qu'une fonction induit une bijection ?
  - Étudier l'équation $f(X) = Y$
  - Dresser le tableau de variations