

TD 4 : Ensembles et applications.

 classique  demande réflexion

1 Relations entre ensembles

Exercice 1.

Montrer les égalités suivantes :

$$]-1, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] \text{ et } [-1, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right]$$

Exercice 2.

Soit E un ensemble. Montrer par un raisonnement direct puis par contraposée l'assertion suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, (A \cap B = A \cup B) \Leftrightarrow A = B,$$

Exercice 3.

Montrer que $\{z \in \mathbb{C}, |z + i| = |z - i|\} = \mathbb{R}$.

2 Images directe et réciproque par une application

Exercice 4.

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.

- Déterminer les ensembles suivants :
 $f([-3, -1])$, $f([-2, 1])$, $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$ et $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$.
- Déterminer les ensembles suivants :
 $f^{-1}([-\infty, 2])$, $f^{-1}([1, +\infty])$, $f^{-1}([-\infty, 2] \cap [1, +\infty])$ et $f^{-1}([-\infty, 1] \cup [2, +\infty])$.

3 Détermination des propriétés d'une fonction

Exercice 5.

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

$$\begin{array}{l} 1. f_1 : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{cases} \\ 2. f_2 : \begin{cases} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{cases} \\ 3. f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x - y, -2x + 2y) \end{cases} \end{array}$$

Exercice 6.

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Est-elle injective? surjective?

Exercice 7.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$

Démontrer que $f \circ f = id$. Que peut-on en déduire sur f ?

4 Bijection induite et réciproque

Exercice 8.

On considère l'application $f : \begin{cases} [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^2 - 4x + 8} \end{cases}$ Montrer que f est injective.

En déduire que f induit une bijection $\tilde{f}$ sur un intervalle qu'on précisera et préciser la bijection réciproque de $\tilde{f}$.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- f est-elle injective? surjective?
- Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
- Montrer que la restriction $g : \begin{cases} [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.
- Retrouver le résultat des deux questions précédentes en étudiant les variations de f .

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

- Montrer que f induit une bijection $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$.
- Déterminer l'expression de $(\tilde{f})^{-1}(y)$.

5 Exercices théoriques

Exercice 11.

Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ surjective telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$, montrer que $f(0) = 0$.

Exercice 12.

Soient E un ensemble et $h: E \rightarrow E$ une application. Montrer que h^2 bijective implique h bijective puis montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que h^n est bijective, alors h est bijective.

Exercice 13.

Soit E un ensemble et $f: E \rightarrow E$ une application telle que $f = f \circ f \circ f$. Montrer que f injective $\Leftrightarrow f$ surjective.

Exercice 14.

Soit $f: X \rightarrow Y$. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

6 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 15.

Soit E un ensemble. Montrer par un raisonnement direct et par contraposée l'assertion suivante :

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3 \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C.$$

Exercice 16.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, montrer que

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) \text{ et } E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B).$$

Exercice 17.

Montrer que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, |z-1| = |z+1|\}$.

Exercice 18.

Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\{z \in \mathbb{C}, \Re e(z) = \Im m(z)\} = \{z \in \mathbb{C}, |z-1| = |z-i|\}$

Exercice 19.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 3$. Déterminer $f^{-1}([0, +\infty[)$, $f^{-1}([-\infty, -3])$ et $f^{-1}([-2, 4])$.

Exercice 20.

$$\text{Soit } f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$

Déterminer $f([0, 1])$, $f([-3, 1])$ et $f^{-1}([\frac{1}{4}, 1])$.

Exercice 21.

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

$$1. f_1: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+2y, x-y) \end{cases}$$

$$2. f_2: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x-y^2 \end{cases}$$

$$3. f_3: \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 22.

Soit $f: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $x \mapsto x^2 - 1$. f est-elle bijective?

Exercice 23.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'image de $f_n: \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \ln(x) \end{cases}$.

Exercice 24.

$$\text{Soit } f: \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{cases} \text{ et } g: \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

1. Ces fonctions sont-elles injectives? surjectives?

2. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 25.

L'application $f: \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (n, m) & \longmapsto & (n+m, n-m) \end{cases}$ est-elle injective? surjective?

Exercice 26.

$$\text{Soit la fonction } f: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3x+5}{x-2} \end{cases}.$$

Montrer que f induit une bijection d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans une partie B de $\mathbb{R}$. On note h la fonction induite, donner une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 27.

Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \\ (u, v) & \longmapsto & \left(uv, \frac{u}{v}\right) \end{cases}$ Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 28.

Soit $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (z, z') \mapsto (2z+z', 3z-z')$. Vérifier que f est bijective et donner l'expression de f^{-1} .

Exercice 29.

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $h: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{cases}$

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.

2. On suppose f et g surjectives. h est-elle surjective?

7 une fois qu'on est à l'aise

Exercice 30.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A et B deux sous-ensembles de E .

1. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où il n'y a pas égalité.
2. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 31.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x - 2y, 2x + 3y) \end{cases}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y = 1\}$. Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$.

Exercice 32.

Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'il existe une injection $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.
2. Soient $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ et $A := \{x \in E, x \notin f(x)\}$. Montrer que $A \notin \text{Im}(f)$. En déduire qu'il n'existe pas de bijection $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Exercice 33.

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer l'équivalence : f surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(Y), f(f^{-1}(B)) = B$.

Memo

- Comment montrer une inclusion $E \subset F$? Prendre un élément de E et montrer qu'il appartient à F .
- Comment montrer que deux ensembles sont égaux?
 - Procéder par double inclusion
 - Raisonner par équivalence.
- Comment déterminer l'image réciproque d'un ensemble? Appliquer la définition : déterminer les antécédents des éléments de l'ensemble.
- Comment déterminer l'image d'une fonction/ d'un ensemble?
 - Chercher pour quel(s) Y l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions
 - Dresser son tableau de variations (dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
- Comment déterminer si une fonction est surjective?
 - Déterminer si l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions
 - Exhiber un élément qui ne possède pas d'antécédent
 - Dresser le tableau de variations
- Comment déterminer si une fonction est injective?
 - Prendre deux éléments ayant même image et déterminer s'ils sont nécessairement égaux.
 - Trouver deux éléments distincts ayant même image
 - Déterminer ses variations (si c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
- Comment savoir si une fonction est bijective?
 - Étudier l'équation $f(X) = Y$
 - Exhiber l'inverse de la fonction
 - Étudier l'injectivité et la surjectivité
- Comment déterminer la bijection réciproque d'une fonction? Résoudre $f(X) = Y$ c'est-à-dire exprimer Y en fonction de X .
- Comment montrer qu'une fonction induit une bijection?
 - Étudier l'équation $f(X) = Y$
 - Dresser le tableau de variations

Correction du TD n 4

Correction 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-1 < -1 + \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ donc $\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \subset]-1, 1[$. On en déduit que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \subset]-1, 1[$$

Pour l'inclusion réciproque, on se donne $x \in]-1, 1[$. On a $x < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq 1 - \frac{1}{n_1} < 1$. De même, on a $-1 < x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{n} = -1$ donc il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $-1 \leq -1 + \frac{1}{n_2} < x$. En prenant $n = \max(n_1, n_2)$, on a $x \in \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ donc $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

On a montré l'égalité par double inclusion.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[-1, 1] \subset \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$. Ceci étant valable pour tout entier non nul n , on a

$$[-1, 1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$$

Soit maintenant $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 - \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $x \in [-1, 1]$.

On a montré l'égalité par double inclusion.

Correction 2 Montrons l'assertion par un raisonnement direct.

Si $A = B$, on a $A \cap B = A \cup B$. On suppose maintenant que A et B sont tels que $A \cap B = A \cup B$. Montrons que $A = B$. On le montre par double inclusion. Soit $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B . Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$ ce qui montre l'inclusion $A \subset B$.

Soit maintenant $x \in B$, par le même raisonnement on montre que $x \in A$. Par double inclusion, on a montré $A = B$.

Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposée. On suppose $A \neq B$, montrons que $A \cap B \neq A \cup B$.

Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus (A \cap B)$ ou alors un élément $x \in B \setminus (A \cap B)$. Quitte à échanger les rôles de A et B , nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus (A \cap B)$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Supposons maintenant $A \cap B \neq A \cup B$ et montrons que $A \neq B$. On sait que $A \cap B \subset A \cup B$ donc $A \cap B \neq A \cup B$ s'il existe $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On a alors $x \in A$ ou $x \in B$.

— Si $x \in A$, alors $x \notin B$ puisque $x \notin A \cap B$. On a donc $A \neq B$.

— Si $x \in B$, alors $x \notin A$ puisque $x \notin A \cap B$. On a donc $A \neq B$.

On a montré, par disjonction de cas, que $A \neq B$. On a donc montré l'équivalence par contraposée.

Correction 3 On raisonne par équivalence :

$$|z + i| = |z - i|$$

$$\Leftrightarrow |z + i|^2 = |z - i|^2 \text{ par positivité des quantités}$$

$$\text{ssi } z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 = z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(i\bar{z} + iz) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\Re(iz) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Im m(z) = 0 \text{ car } \Re(iz) = -\Im m(z)$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

On a montré que :

$$z \in \{z \in \mathbb{C}, |z + i| = |z - i|\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R},$$

les deux ensembles sont donc égaux.

On peut aussi raisonner géométriquement. On note M , A et B les images de z , i et $-i$. On a

$$|z + i| = |z - i| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \Leftrightarrow M \text{ appartient à } O_x \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

On a donc l'égalité entre les deux ensembles.

Correction 4

1. On a

$$\text{— } f([-3, -1]) = [1, 9],$$

$$\text{— } f([-2, 1]) = [0, 4],$$

$$\text{— } f([-3, -1] \cup [-2, 1]) = f([-3, 1]) = [0, 9] = f([-3, -1]) \cup f([-2, 1]) \text{ et}$$

$$\text{— } f([-3, -1] \cap [-2, 1]) = f([-2, -1]) = [1, 4] = f([-3, -1]) \cap f([-2, 1]).$$

2. On a

$$\text{— } f^{-1}([-\infty, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\text{— } f^{-1}([1, +\infty]) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[,$$

$$\text{— et } f^{-1}([-\infty, 2] \cap [1, +\infty]) = f^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}].$$

$$- f^{-1}([-\infty, 1] \cup [2, +\infty]) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus]1, 2]) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[= \mathbb{R} \setminus f^{-1}([1, 2]).$$

Correction 5

1. f_1 n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent, elle n'est pas injective car $f_1(2) = f_1(1/2)$
2. f_2 n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent, elle est injective car un élément admet au plus 2 antécédents par f_2 qui sont inverses l'un de l'autre et un seul peut appartenir à $]1, +\infty[$.
3. f_3 n'est pas surjective car $(1, 1)$ n'a pas d'antécédent, elle n'est pas injective car $f_3(1, 1) = f_3(0, 0)$.

Correction 6 Soit $a \in \mathbb{R}$, on cherche à résoudre l'équation $f(x) = a$. On raisonne par équivalence :

$$f(x) = a \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = a \Leftrightarrow 1-x = e^a(1+x) \Leftrightarrow 1-e^a = x(1+e^a).$$

On a $e^a \neq -1$, donc $x = \frac{1-e^a}{1+e^a}$. On veut $x \in]-1, 1[$, on raisonne par équivalence :

$$-1 < \frac{1-e^a}{1+e^a} < 1 \Leftrightarrow -1-e^a < 1-e^a < 1+e^a,$$

Le dernier encadrement est vrai donc, par équivalence, l'unique solution trouvée appartient bien à $] -1, 1[$. L'équation a une unique solution donc f est bijective.

Correction 7 Soit $x \in \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ donc $f \circ f(x) = f(x) = x$. Soit $x \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1-x$ donc $f \circ f(x) = f(1-x)$. Or $1-x \notin \mathbb{Q}$. En effet, si on suppose, par l'absurde, que c'est le cas, alors $1-(1-x) \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. On a donc $f \circ f(x) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$. Donc pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f \circ f(x) = x$. Et donc $f \circ f = id$.

On en déduit que f est bijective et que $f^{-1} = f$.

Correction 8 L'application $x \mapsto x^2 - 4x + 8$ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$, la racine carrée aussi. En tant que composée de fonctions strictement croissantes, l'application f est strictement croissante donc injective.

On sait qu'elle est surjective si on la corestreint à son image, on va donc déterminer celle-ci. Comme f est croissante, on sait que

$$\text{Im}(f) = f([2, +\infty[) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [2, +\infty[.$$

L'application f induit donc une bijection de $[2, +\infty[$ sur lui-même.

Pour déterminer la bijection réciproque, on se donne $a \in [2, +\infty[$ et on résout $f(x) = a$ (en cherchant x dans $[2, +\infty[$).

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} f(x) = a &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 8} = a \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 8 = a^2 \text{ par positivité des quantités } \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + (8 - a^2) = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $4(a^2 - 4)$, il est donc positif et les racines réelles sont

$$\begin{cases} \frac{4 \pm \sqrt{4(a^2 - 4)}}{2} = 2 \pm \sqrt{a^2 - 4} \text{ si } a \neq 2 \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Si $a > 2$, on a $2 - \sqrt{a^2 - 4} < 2$ donc l'unique solution appartenant à $[2, +\infty[$ est $2 + \sqrt{a^2 - 4}$.

Si $a = 2$, on retrouve l'unique solution 2. On en déduit que

$$\tilde{f}^{-1} : \begin{cases} [2, +\infty[& \longrightarrow & [2, +\infty[\\ x & \longmapsto & 2 + \sqrt{x^2 - 4} \end{cases}.$$

Correction 9

1. L'équation $f(x) = y$ est équivalente à l'équation

$$yx^2 - 2x + y = 0.$$

Si $y \neq 0$ et le discriminant est strictement négatif, (par exemple pour $y = 2$), alors l'équation n'a pas de solution réelle donc f n'est pas surjective. Si le discriminant est strictement positif, l'équation a deux racines réelles distinctes donc f n'est pas injective.

2. Si $y = 0$, l'unique solution est $x = 0$, si $y \neq 0$, cette équation d'ordre 2 en x admet des solutions si et seulement si son discriminant $\Delta = 4 - 4y^2$ est positif ou nul donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Ainsi, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution si et seulement si $y \in [-1, 1]$, nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1, 1]$.

3. Soit $y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ alors les solutions possibles de l'équation $g(x) = y$ sont :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y},$$

pour $y \neq 0$ et 0 si $y = 0$. Montrons que la seule solution dans $[-1, 1]$ est $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. On

$$a \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1].$$

En effet, $0 < \sqrt{1-y^2} < 1$ donc $\frac{1}{2} < \frac{|y|}{1+\sqrt{y^2}} < 1$ puis $\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1]$. Montrons que l'autre solution n'appartient pas à $[-1, 1]$. Il faut éliminer le cas où $y = \pm 1$ car les deux solutions sont alors égales. Si $y \in]0, 1[$, on a

$$\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} > y-1$$

et la deuxième inégalité est vraie donc $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} > 1$.

Si $y \in]-1, 0[$, on a

$$\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} > -y+1$$

et la deuxième inégalité est vraie donc $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} < -1$

On a montré que pour tout $y \in [-1, 1]$, l'équation $g(x) = y$ admettait une unique solution dans $[-1, 1]$ donc g est bijective.

4. On a $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $] -1, 1[$ et f est strictement croissante sur $[-1, 1]$. On en déduit que f est injective et $f([-1, 1]) = [-1, 1]$ donc la restriction de f , $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, est une bijection.

Correction 10

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On étudie l'équation $f(x) = a$. On remarque que $|f(x)| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$, il n'y a donc pas de solution si a n'appartient pas à $] -1, 1[$. Soit maintenant $a \in] -1, 1[$ et cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{1+|x|} = a$. On remarque que x et a sont de même signe.

— Si $a > 0$, on cherche une solution $x > 0$ et $f(x) = a \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{1-a}$.

— Si $a < 0$, on cherche une solution $x < 0$ et $f(x) = a \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{1+a}$.

— Si $a = 0$, alors $x = 0$.

On a montré que pour tout $a \in] -1, 1[$, l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution, f induit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

2. D'après le travail fait à la question précédente, si $y \in] -1, 1[$, l'unique antécédent de y par f est $\frac{y}{1-|y|}$.

Correction 11 On note k un antécédent de 0. On a alors $f(k) = 0$. Or, par hypothèse, $f(k) \geq k$ donc $0 \geq k$. Comme k est un entier naturel, on a $k = 0$.

Correction 12 On suppose h^2 bijective alors $h^2 = h \circ h$ est injective et surjective ce qui implique, d'après le résultat vu en cours, que h est injective et surjective donc bijective.

On suppose maintenant h^n bijective alors $h^n = h \circ h^{n-1}$ est surjective donc h l'est et $h^n = h^{n-1} \circ h$ est injective donc h l'est. On en déduit que h est bijective.

Correction 13 Montrons-le par double implication. Supposons tout d'abord f injective. Montrons que f est surjective. Soit $x \in E$, alors $f(x) = f(f \circ f(x))$ donc, par injectivité de f , $f \circ f(x) = x$. Ainsi, $f(x)$ est un antécédent de x par f . Ceci étant valable pour tout $x \in E$, f est surjective.

Supposons maintenant f surjective. Montrons que f est injective. On suppose donc qu'il existe (a, b) tel que $f(a) = f(b)$, montrons que $a = b$. La fonction f étant surjective, il existe $(a', b') \in E^2$ tel que $f(a') = a$ et $f(b') = b$. On a alors $f(a') = f \circ f \circ f(a') = f \circ f(a)$ et $f(b') = f \circ f(b)$. Comme $f(a) = f(b)$, on a $f \circ f(a) = f \circ f(b)$ donc $f(a') = f(b')$ c'est-à-dire $a = b$, par définition de a' et b' donc f est injective.

Par double implication, on a montré l'équivalence.

Correction 14 Soit $B \in \mathcal{P}(Y)$, alors $f(f^{-1}(B)) \subset f(X)$ et $\forall c \in f(f^{-1}(B))$, il existe $a \in f^{-1}(B)$, $f(a) = c$ et $f(a) \in B$ puisque $a \in f^{-1}(B)$. On a donc $c \in B$ ce qui montre l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(X)$.

Soit maintenant $y \in B \cap f(X)$, alors $y \in f(X)$ donc il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Or, $y \in B$ donc $f(x) \in B$ ce qui est équivalent à $x \in f^{-1}(B)$. On a donc $y \in f(f^{-1}(B))$ ce qui montre l'autre inclusion.

Correction 15 On commence par le raisonnement direct. Si $B = C$, on a bien $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Soient maintenant A, B, C tels que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Montrons que $B = C$. On le montre par double inclusion. Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = A \cup C$ donc $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in C$, c'est gagné. Si $x \in A$, alors $x \in B \cap A$. Or $A \cap B = A \cap C$, on a donc $x \in C$. Ainsi, on a montré que pour tout $x \in B$, on a $x \in C$ d'où l'inclusion. L'autre inclusion se montre en inversant les rôles de B et C .

Montrons maintenant l'équivalence par contraposée. Supposons $B \neq C$ montrons que $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. Comme $B \neq C$, il existe $b \in B \setminus (B \cap C)$ ou $c \in C \setminus (B \cap C)$. S'il existe $b \in B \setminus (B \cap C)$, on a $b \notin c$ et on a deux cas possibles :

- $b \in A$: dans ce cas $b \in A \cap B$ mais $b \notin A \cap C$ puisque $b \notin C$, ce qui montre que $A \cap C \neq A \cap B$.
 - $b \notin A$: dans ce cas $b \in A \cup B$ mais $b \notin A \cup C$ puisque $b \notin C$ ce qui montre que $A \cup C \neq A \cup B$.
- S'il existe $c \in C \setminus (B \cap C)$, le raisonnement est identique.

Correction 16 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
 x \in E \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\
 &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\
 &\Leftrightarrow x \in E \setminus A \text{ et } x \in E \setminus B \\
 &\Leftrightarrow x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B).
 \end{aligned}$$

À nouveau, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
 x \in E \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\
 &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\
 &\Leftrightarrow x \in E \setminus A \text{ ou } x \in E \setminus B \\
 &\Leftrightarrow x \in (E \setminus A) \cup (E \setminus B).
 \end{aligned}$$

Correction 17 On peut raisonner par équivalence. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
 &|z - 1| = |z + 1| \\
 \Leftrightarrow &|z - 1|^2 = |z + 1|^2 \text{ par positivité du module} \\
 \Leftrightarrow &(x - 1)^2 + y^2 = (x + 1)^2 + y^2 \\
 \Leftrightarrow &-2x = 2x \\
 \Leftrightarrow &x = 0 \\
 \Leftrightarrow &z \in i\mathbb{R}
 \end{aligned}$$

On a bien l'équivalence entre $z \in i\mathbb{R}$ et $|z - 1| = |z + 1|$ donc les deux ensembles sont égaux.

On peut aussi raisonner par double inclusion. Si $z \in i\mathbb{R}$, alors $z = ib$, $b \in \mathbb{R}$ donc

$$\begin{aligned}
 |z - 1| &= \sqrt{(-1)^2 + b^2} \\
 &= \sqrt{1 + b^2} \\
 &= |z + 1|
 \end{aligned}$$

On a donc l'inclusion $i\mathbb{R} \subset \{z \in \mathbb{C}, |z + 1| = |z - 1|\}$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z + 1| = |z - 1|$. On pose $z = a + ib$ avec a, b réels.

On a

$$\sqrt{(a + 1)^2 + b^2} = \sqrt{(a - 1)^2 + b^2}$$

donc, en élevant au carré

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 - 2a + 1 + b^2$$

ce qui impose $a = 0$. Ainsi, $z = ib$ donc $z \in i\mathbb{R}$.

Par double inclusion, on a montré l'égalité des deux ensembles.

On peut également raisonner de manière géométrique en notant M, A et B les images de $z, -1$ et 1 . On a alors

$$|z + 1| = |z - 1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \Leftrightarrow M \text{ appartient à } O_y \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

Correction 18 On peut raisonner par équivalence. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}
 &|z - 1| = |z - i| \\
 \Leftrightarrow &|z - 1|^2 = |z - i|^2 \text{ par positivité du module} \\
 \Leftrightarrow &(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 \\
 \Leftrightarrow &-2x = -2y \\
 \Leftrightarrow &x = y \\
 \Leftrightarrow &\Re(z) = \Im(z)
 \end{aligned}$$

On a montré qu'un complexe appartient au premier ensemble si et seulement s'il appartient au deuxième, les deux ensembles sont donc égaux.

On peut aussi raisonner par double inclusion.

Soit donc $z \in \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) = \Im(z)\}$, alors $z = a + ia$. On a alors

$$|z - 1| = \sqrt{(a - 1)^2 + a^2}$$

et

$$|z - i| = \sqrt{a^2 + (a - 1)^2}$$

donc $|z - i| = |z - 1|$ et le premier ensemble est inclus dans le deuxième.

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - 1| = |z - i|$, montrons que z vérifie $\Re(z) = \Im(z)$.

On pose $z = a + ib$ avec a, b réels. On a

$$|z - 1| = \sqrt{(a - 1)^2 + b^2} \text{ et } |z - i| = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}.$$

On élève au carré, on obtient

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1,$$

d'où, après simplification, $a = b$. On a donc bien $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z)$ ce qui montre l'inclusion réciproque. Les deux ensembles sont bien égaux.

On peut également raisonner de manière géométrique en notant M, A et B les images de $z, 1$ et i . On a alors

$$|z - 1| = |z - i| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite } y = x \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z)$$

Correction 19 On a $f^{-1}([0, +\infty[) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, -3]) = \emptyset$ et $f^{-1}([-2, 4]) = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Correction 20 Le plus simple est de tracer le tableau de variations de la fonction. La fonction f est dérivable, on a $f' : x \mapsto -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$. On a donc :

x	0	1
f	1	$\frac{1}{2}$

On a donc :

$$f([0, 1]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

De même, on a :

x	-3	0	1
f	$\frac{1}{10}$	1	$\frac{1}{2}$

On en déduit que :

$$f([-3, 1]) = \left[\frac{1}{10}, 1\right].$$

Enfin, pour déterminer l'image réciproque, on se donne $x \in \mathbb{R}$ et on raisonne par équivalence :

$$\frac{1}{4} < f(x) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + x^2 < 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

On a donc l'égalité :

$$f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, 1\right]\right) =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[.$$

Correction 21

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_1(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ x - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = a + b \\ 3y = a - b \end{cases}$$

Ainsi (a, b) admet un unique antécédent par f_1 , on en déduit que f_1 est bijective.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $f_2(a, 0) = a$ donc f_2 est surjective. En revanche, $f_2(0, 1) = f_2(0, -1)$ donc elle n'est pas injective.

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$,

— Si $k \geq 0$, alors $f_3(2k) = k$.

— Si $k < 0$, alors $f_3(-2k - 1) = k$

On a montré que f_3 était surjective. Montrons que f_3 est injective. Soit donc $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f_3(a) = f_3(b)$.

— Si a est pair, alors $f_3(a) = \frac{a}{2}$ donc $f_3(b) \geq 0$ ce qui impose b pair et $\frac{b}{2} = \frac{a}{2}$ donc $a = b$.

— De même, si a est impair, alors $f_3(a)$ est strictement négatif donc $f_3(b)$ aussi, on a donc a et b impairs d'où $\frac{a+1}{2} = \frac{b+1}{2}$ et $a = b$

La fonction f_3 est bien injective, elle est donc bijective.

Correction 22

— Montrons que f est injective : Soit $(x, y) \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $x^2 - 1 = y^2 - 1$ d'où $x = \pm y$. Or, x et y sont positifs, on a donc $x = y$ et f est injective.

— Montrons que f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Montrons qu'il existe un réel $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. On remarque que le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient, on a donc bien f surjective.

On a montré que f est bijective.

Correction 23 On va déterminer son tableau de variations. Pour cela, on remarque que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \ln(x) + x^{n-1} = x^{n-1}(n \ln(x) + 1).$$

On a donc :

$$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow n \ln(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{n}}.$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{-\frac{1}{n}}$	$+\infty$
$f(x)$	0	$-\frac{1}{en}$	$+\infty$

On en déduit que l'image de f_n est $\left[-\frac{1}{en}, +\infty\right]$.

Correction 24 La fonction f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$, elle est injective car $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$. La fonction g est surjective car pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x+1$ est un antécédent par g . En revanche, elle n'est pas injective car $g(0) = g(1) = 0$. Soit $x \in \mathbb{N}^*$, on a $f \circ g(x) = f(x-1) = (x-1)+1 = x$ et $f \circ g(0) = f(0) = 1$ donc

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{N}$, alors $g \circ f(x) = g(x+1) = (x+1)-1 = x$ donc $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$.

Remarque. On a $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ mais $f \circ g \neq id_{\mathbb{N}}$ et ni f ni g n'est bijective.

Correction 25 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, résolvons le système $f(n, m) = (a, b)$. On trouve $n = \frac{a+b}{2}$ et $m = \frac{a-b}{2}$. Si a et b ne sont pas de même parité, il n'existe pas de solution dans $\mathbb{Z}$ donc f n'est pas surjective.

En revanche, si un antécédent existe (dans $\mathbb{Z}^2$), il est unique, égal à $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ donc f est injective.

Correction 26 On se donne un élément $a \in \mathbb{R}$ et on cherche à résoudre l'équation $f(x) = a$ avec $x \neq 2$. On raisonne par équivalence :

$$f(x) = a \Leftrightarrow \frac{3x+5}{x-2} = a \Leftrightarrow 3x+5 = a(x-2) \Leftrightarrow (a-3)x = 5+2a.$$

On voit, ici, que pour $a = 3$, l'équation n'a pas de solution. De plus, si $a \neq 3$, l'équation a une unique solution : $x = \frac{5+2a}{a-3}$. On en déduit que f induit une bijection h de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et l'expression de la bijection réciproque est

$$h^{-1}(x) = \frac{5+2x}{x-3}.$$

Correction 27

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on étudie l'équation $f(x, y) = (a, b)$. On a donc

$$f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = a \\ \frac{x}{y} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = ab \\ xy = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{ab} \\ y = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{cases}$$

On cherche (x, y) dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ donc (a, b) admet un unique antécédent dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ qui est $\left(\sqrt{ab}, \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. L'application réciproque est donc $f^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\sqrt{xy}, \sqrt{\frac{x}{y}}\right)$.

Correction 28 Comme on demande l'application réciproque, on va chercher à résoudre l'équation $f(z, z') = (a, b)$ pour un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ donné. On raisonne par équivalence :

$$\begin{cases} 2z + z' = a \\ 3z - z' = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5z = a + b \\ 5z' = 3a - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{a+b}{5} \\ z' = \frac{3a-2b}{5} \end{cases}.$$

On a montré que l'équation possède une unique solution, l'application est donc bijective.

De plus, l'unique antécédent de (a, b) est $\left(\frac{a+b}{5}, \frac{3a-2b}{5}\right)$ donc

$$f^{-1} : (z, z') \mapsto \left(\frac{z+z'}{5}, \frac{3z-2z'}{5}\right).$$

Correction 29

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $h(a) = h(b)$. On a alors

$$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$$

donc $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$. Par injectivité de f , on a $a = b$ donc h est injective.

Remarque. l'injectivité d'une seule des deux fonctions suffit.

2. C'est faux. En effet, étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a$ et $x' \in \mathbb{R}$ tel que $g(x') = b$ mais il n'y a aucune raison pour que $x = x'$. Pour se convaincre, on peut considérer la fonction $h : x \mapsto (x, x)$. On a $f = id = g$ et les deux fonctions sont surjectives (et même bijectives), pourtant l'élément $(1, 2)$ n'admet pas d'antécédent par h .

Correction 30

1. Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. On a $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$.

De même, $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$ d'où $y \in f(A) \cap f(B)$ ce qui montre l'inclusion

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

L'inclusion réciproque est fautive en général.

Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $A = \mathbb{R}_+^*, B = \mathbb{R}_-^*$. On a $A \cap B = \emptyset$ et $f(A) = f(B) = \mathbb{R}_+^*$ donc $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$.

2. Soit $y \in f(A \cup B)$, alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$. Si $x \in B$, alors $y = f(x) \in f(B)$. On a donc $y \in f(A) \cup f(B)$ d'où l'inclusion

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

Soit maintenant $y \in f(A) \cup f(B)$, alors soit $y \in f(A)$, soit $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $A \subset A \cup B$, on a $x \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$. De même, si $y \in f(B)$, alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$ et comme $B \subset A \cup B$, on a $x \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$. On a bien l'inclusion réciproque

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

d'où l'égalité.

Correction 31

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, résolvons le système $f(x, y) = (a, b)$:

$$\begin{cases} x - 2y = a \\ 2x + 3y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = b - 2a \\ 7x = 3a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3a + 2b}{7} \\ y = \frac{b - 2a}{7} \end{cases}.$$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le système admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$ donc f est bijective.

2. On commence par remarquer que les éléments de Δ s'écrivent $(x, 1 - 2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (a, b) \in f(\Delta) &\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \Delta, f(x, y) = (a, b) \\ &\Leftrightarrow \exists (x, 1 - 2x) \in \mathbb{R}^2, f(x, 1 - 2x) = (a, b) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, (5x - 2, 3 - 4x) = (a, b) \end{aligned}$$

Le système

$$\begin{cases} 5x - 2 = a \\ 3 - 4x = b \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} 5x = a + 2 \\ 4x = 3 - b \end{cases}.$$

Il admet une solution si et seulement si $4(a + 2) = 5(3 - b)$ ce qui se réécrit $4a + 5b = 7$.

Par équivalence, on a montré :

$$f(\Delta) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, 4a + 5b = 7\}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (x, y) \in f^{-1}(\Delta) &\Leftrightarrow f(x, y) \in \Delta \\ &\Leftrightarrow (x - 2y, 2x + 3y) \in \Delta \\ &\Leftrightarrow 2(x - 2y) + (2x + 3y) = 1 \\ &\Leftrightarrow 4x - y = 1 \end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré que :

$$f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x - y = 1\}.$$

Correction 32

- Il suffit de considérer l'application qui à x associe le singleton $\{x\}$. Elle est bien définie de E dans $\mathcal{P}(E)$ et $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x = y$ donc elle est injective.
- Si $A \in \text{Im}(f)$, alors, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = A$. On a alors
 - Si $a \in A$, alors par définition de A , $a \notin f(a) = A$ ce qui est absurde.
 - Si $a \notin A$, alors, par définition de A , $a \in f(a)$. Or $f(a) = A$, on obtient, à nouveau, une contradiction.

Un tel élément a de E ne peut donc pas exister ce qui montre qu'une application de E dans $\mathcal{P}(E)$ ne peut pas être surjective, il n'existe donc pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Correction 33

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\Leftrightarrow f(X) = Y \\ &\Leftrightarrow \forall B \subset Y, B \cap f(X) = B \\ &\Leftrightarrow \forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B \text{ d'après l'exercice 14} \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence souhaitée.