Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
DM 1

Devoir maison 1.

à rendre le 13 octobre pour les trinômes pairs

On considère la fonction $h(x) = e^x - x$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner une équivalent de h en $0, +\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier la fonction h. On précisera notamment si elle est dérivable, on dressera son tableau de variations ainsi qu'une allure de son graphe en précisant les symétries éventuelles.
3. Déduire de la question précédente que pour tout réel x non-nul, il existe un unique réel non-nul y différent de x tel que $h(x) = h(y)$.

Dans toute la suite, on note $f(x)$ cet unique réel. On définit ainsi une fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^\star$ qui à x associe $f(x)$.

4. Déduire de l'étude de h faite à la question 1 que $(x < x') \Rightarrow (f(x) > f(x'))$. On différenciera trois cas: $x < 0 < x'$, $0 < x < x'$ et $x < x' < 0$. En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}^\star$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a $f(f(x)) = x$. En déduire que f est bijective. On précisera sa réciproque f^{-1}. Que peut-on en déduire sur le graphe de f?
6. On veut retrouver les résultats de la question précédente avec des bijections induites.
   (a) Montrer que h induit deux bijections $\varphi : I_1 \to J_1$ et $\psi : I_2 \to J_2$ avec $I_1 \cup I_2 = \mathbb{R}^\star$ et $I_1 \subset \mathbb{R}^+$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, exprimer $f(x)$ à l'aide de $\varphi, \psi, \varphi^{-1}$ et ψ^{-1}.
   (c) En déduire les variations de f.
   (d) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f \circ f(x) = x$.

On admet que pour tout réel x positif, on a $e^x - e^{-x} \geqslant 2x$.

7. Montrer que pour tout réel x positif, $h(-x) \leqslant h(x)$. En déduire que
$$h(f(x)) \geqslant h(-x), \forall x \in \mathbb{R}^+$$
puis
$$f(x) \leqslant -x, \forall x \in \mathbb{R}^+$$
Quelle est la limite de f en $+\infty$.
8. Montrer que pour tout réel x, $f(x) + h(x) = e^{f(x)}$. En déduire la limite de la fonction $f + h$ en $+\infty$. Comment cela se traduit-il en termes de graphe de f et de h?
9. En tenant compte de tous les renseignements obtenus (décroissance, symétrie, prolongement, limites), tracer le graphe de f.