

Chapitre 5: Fonctions usuelles

Introduction: Soit $f : I \rightarrow f(I)$ une fonction continue est strictement monotone alors f est une bijection. Soit $b \in f(I)$. On suppose que f est dérivable en $f^{-1}(b)$.

- Si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et sa dérivée vaut

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}.$$

- Si $f'(f^{-1}(b)) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b mais le graphe de f^{-1} admet une tangente verticale en le point d'abscisse b .

Conclusion: Si f est dérivable en tout point de I alors f^{-1} est dérivable sur $J = \{y \in f(I), f^{-1}(y) \neq 0\}$ et $\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$.

1 Relations de comparaison entre fonctions

1.1 Équivalence

Définition 1. Soit a un réel ou a égal $\pm\infty$. On dit que f est équivalente à g lorsque x tend vers a et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet une limite lorsque x tend vers a égale à 1.

Exemples 1.

1. $x^2 + 3x - 7 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2.$

2. $x^2 + 3x - 7 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -7$

3. $(x^2 + x)e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 e^x.$

4. $(x^2 + x)e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

5. $(x^2 + x)e^x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 2e$

Remarque : $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$. On dit que f et g sont équivalentes.

Proposition 1.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} l$

Exemple 2. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1.$



On ne peut jamais être équivalent à 0 !!!!

Proposition 2.

Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et que f admet une limite en a , alors g admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Exemples 3.

1. $x^2 - 3x - 4$ et x^2 en $+\infty$.

2. $x^2 + x \cos(x)$ et xe^x en 0.

3. $x \cos(x)$ et $(x + 1) \cos(x)$ en $+\infty$.



La réciproque est fautive !

Exemple 4. Les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x$ ont la même limite en 0 et $+\infty$ mais ne sont équivalentes ni en 0 ni en $+\infty$.

Proposition 3.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)$
ou encore $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (x - a)f'(a)$.

Exemples 5.

1. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots$

4. $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots$

2. $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots$

5. $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots$

3. $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots$

6. $\frac{1}{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \dots$



La somme dans les équivalents n'est pas pertinente!

Exemple 6. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ est vraie mais $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 - x$ aussi (et $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \frac{17x}{2} - x^2$ aussi).

Proposition 4.

Si $f_1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$ (sous réserve que cela ait du sens).

Exemples 7.

1. Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, a-t-on $f^2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g^2(x)$?

2. Montrer que $\sqrt{1 + \sin(x)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$.



Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, on ne sait rien de la relation entre $h \circ f(x)$ et $h \circ g(x)$

Exemples 8.

1. $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + 1$ mais e^x et e^{x+1} ne sont pas équivalents car $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e$

2. $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + 1$ et $\ln(x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$

Question: Si $f_1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2$ a-t-on $f_1(x) + f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$? Peut-on trouver un équivalent de $\sin(2x) - \tan(x)$?

1.2 Négligeabilité

Définition 2. On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a (ou que $f(x)$ est un "petit o" de $g(x)$) si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$.

C'est équivalent de dire que $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$.

Exemples 9.

1. $x^2 + x^3 = o_{x \rightarrow 0}(x)$.

2. $e^{x^2} - 1 = o_{x \rightarrow 0}(x)$.

Proposition 5.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $o_{x \rightarrow a}(\lambda g(x)) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$

Proposition 6 (opérations en 0).

- $o_{x \rightarrow 0}(x) + o_{x \rightarrow 0}(x) = o_{x \rightarrow 0}(x)$
- $o_{x \rightarrow 0}(x) - o_{x \rightarrow 0}(x) = o_{x \rightarrow 0}(x)$
- $o_{x \rightarrow 0}(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^2) = o_{x \rightarrow 0}(x)$
- $\frac{o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x} = o_{x \rightarrow 0}(x)$.
- $x \cdot o_{x \rightarrow 0}(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- $\left(o_{x \rightarrow 0}(x)\right)^2 = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$

Remarque: $\frac{o_{x \rightarrow 0}(x)}{x^2}$ est une forme indéterminée.

 On a $o_{x \rightarrow 0}(x^2) = o_{x \rightarrow 0}(x)$ mais $o_{x \rightarrow 0}(x) \neq o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.

Remarque. On définira plus tard la notion de domination, notée $O(\)$ qui traduit le fait que le quotient est borné.

On peut généraliser le résultat précédent :

Proposition 7 (opérations en 0).

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $o_{x \rightarrow 0}(x^m) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

- $\frac{o_{x \rightarrow 0}(x^m)}{x^n} = o_{x \rightarrow 0}(x^{m-n})$ si $m > n$
- $x^m \cdot o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n+m})$
- $o_{x \rightarrow 0}(x^n) \cdot o_{x \rightarrow 0}(x^m) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n+m})$.
- $o_{x \rightarrow 0}(x^n) + o_{x \rightarrow 0}(x^m) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ si $m > n$

1.3 Développement limité

Notations: Si $f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x))$, on écrit $f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(h(x))$.

Exemples 10.

1. $e^x = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$

2. $\sin(x) = x + o(x)$.

Proposition 8.

On a $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(g(x))$.

Exemples 11.

1. On a $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\ln(1+x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$.
2. Donner un équivalent de $e^{x^2} - 1 + \sin(x)$ en 0

Proposition 9 (DL1 de f en a). Si f est dérivable en a , alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_{x \rightarrow a}(x-a).$$

Exemple 12. On a le DL1 $\cos(x) = 1 + o_{x \rightarrow 0}(x)$ bien que nous n'ayons pas d'équivalent de $\cos(x) - 1$ en 0.

Remarque: On admet, pour le moment, que l'on peut obtenir un DL d'ordre supérieur à 1 (on va se contenter de 2 ou 3 pour l'instant) à l'aide de dérivées successives pour les fonctions usuelles.

DL usuels en 0:

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.

Remarque: l'intérêt des développements limités par rapport aux équivalents est que l'on peut les additionner ! En effet, on sait exactement ce que vaut l'addition de deux "o()".

Exemples 13.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \tan(x)}{x}$?
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\ln(1+2x) - \sin(x)}$?
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - e^{x^2}}{\tan(x/2) - \ln(1+x)}$?
4. DL₁ en 0 de $\ln(2+x)$?
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2}}{\sin(x^2)}$?

2 Fonctions exponentielle, logarithme et puissance

2.1 Le logarithme népérien

Définition 3. On définit la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ comme l'unique fonction y dérivable de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} vérifiant

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Proposition 10.

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln|x| \end{cases}$ est dérivable, de dérivée : $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x}$

On dérive sur chacun des intervalles \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^*

Corollaire 11.

Soit un intervalle I de \mathbb{R} , un point a de I et une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}^*$, dérivable en a . Alors la fonction : $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln|u(x)| \end{cases}$ est dérivable en a , de nombre dérivée $\frac{u'(a)}{u(a)}$.

Exemple 14. Sur quel intervalle la fonction $x \mapsto \ln(\sqrt{x} + 1)$ est-elle dérivable? Préciser sa dérivée.

$$\text{On admet } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

Proposition 12 (équation fonctionnelle du \ln).

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Question: Si f est dérivable telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y)$, que dire de f ?

Corollaire 13.

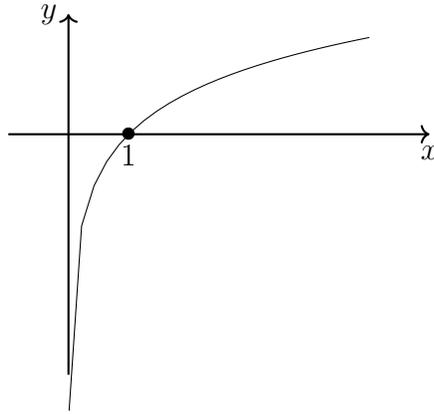
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- $\forall (k, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*, \ln(x^k) = k \ln(x)$.

On en déduit les limites aux bornes de son domaine de définition:

Proposition 14.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

On a le graphe suivant :



Proposition 15.

La fonction \ln est une bijection.

Notations: On note e l'unique antécédent de 1 par \ln . On retient qu'il vaut environ 2,72.

2.2 L'exponentielle

Définition 4. Pour tout réel x , on note $\exp(x)$ l'unique antécédent de x par \ln . On définit ainsi une fonction, appelée fonction exponentielle, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Remarque: La fonction $\exp|_{\mathbb{R}^*}$ est la bijection réciproque de \ln .

Proposition 16.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln(x)) = x.$

Proposition 17 (équation fonctionnelle de l'exponentielle).

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{Z}$,

- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$
- $\exp(kx) = (\exp(x))^k.$
- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$

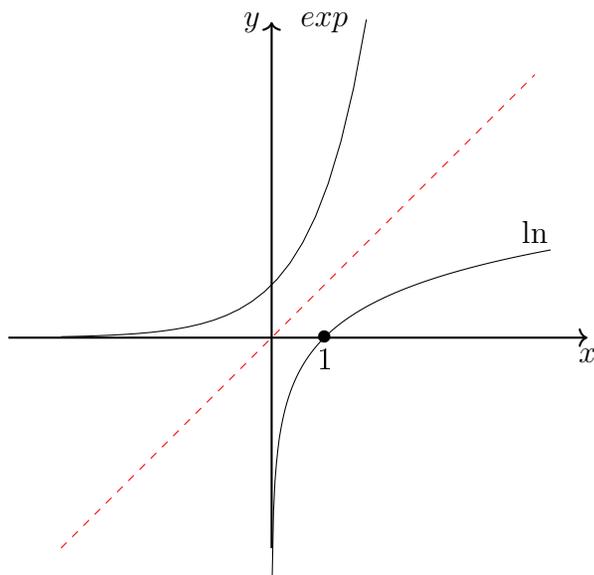
Proposition 18.

La fonction \exp est dérivable, de dérivée elle-même.

Elle est strictement croissante et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$

On a $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$

On a le graphe suivant :



2.3 Puissances réelles

- Pour rappel, si x est réel alors on définit x^n pour tout entier naturel n par

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}.$$

En particulier x^0 est un produit vide et vaut donc 1

- Si en outre x est non nul on dispose alors de son "inverse" x^{-1} ce qui permet de définir pour tout entier naturel n ,

$$x^{-n} = (x^{-1})^n.$$

On a ainsi défini x^n pour tout entier relatif n .

Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $x^n = \exp(n \ln(x))$ ce qui incite à définir :

Définition 5. Soit x un réel **strictement positif** et α un réel **quelconque**. On pose :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

Remarque. On sait que $e = \exp(1)$, on constate alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^t = \exp(t \ln(e)) = \exp(t)$$

Proposition 19 (Règles de calcul). Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

1. $\forall (x, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, x^\alpha > 0.$

5. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta,$

2. $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha},$

6. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$

3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x),$

4. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ et $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha},$

7. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, 1^\alpha = 1.$

Remarque: En particulier, pour tout réel $x > 0$, le nombre $x^{\frac{1}{2}}$ est positif, et vérifie quand on le met au carré :

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$$

donc $x^{\frac{1}{2}}$ est l'unique nombre positif qui, mis au carré, donne x . Autrement dit : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

donc $x^{\frac{1}{n}}$ est l'unique antécédent positif de x par $t \mapsto t^n$, d'où $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Remarque. • Si $(n, q) \in \mathbb{N}^2$, $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{1/(2q+1)}$ sont définies sur \mathbb{R}

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^{1/n}$ est définie sur \mathbb{R}^+
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

Dans ce paragraphe, on note $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{cases}$

Par propriété des puissances, on a $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha\beta}$. On a donc

Proposition 20.

Pour tout $\alpha \neq 0$, f_α réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* dans lui-même, et sa bijection réciproque est $f_{\frac{1}{\alpha}}$.

Proposition 21.

Par composition de fonctions dérivables, f_α l'est et

$$\forall x > 0, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

qui est du signe de α de sorte que si :

- $\alpha = 0$, f_α est constante,
- $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante, de limite $+\infty$ en 0 et de limite nulle en $+\infty$.
- $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante, de limite 0 en 0 et de limite $+\infty$ en $+\infty$.

Cela découle de la dérivée/calcul de limite d'une composée. On retrouve que la fonction est bijective si $\alpha \neq 0$ car elle est strictement monotone donc injective et, par les limites, son image vaut \mathbb{R}_+^* .

Exemples 15.

1. Dérivée de $x \mapsto (\sin(x))^x$ sur $]0, \pi[$.

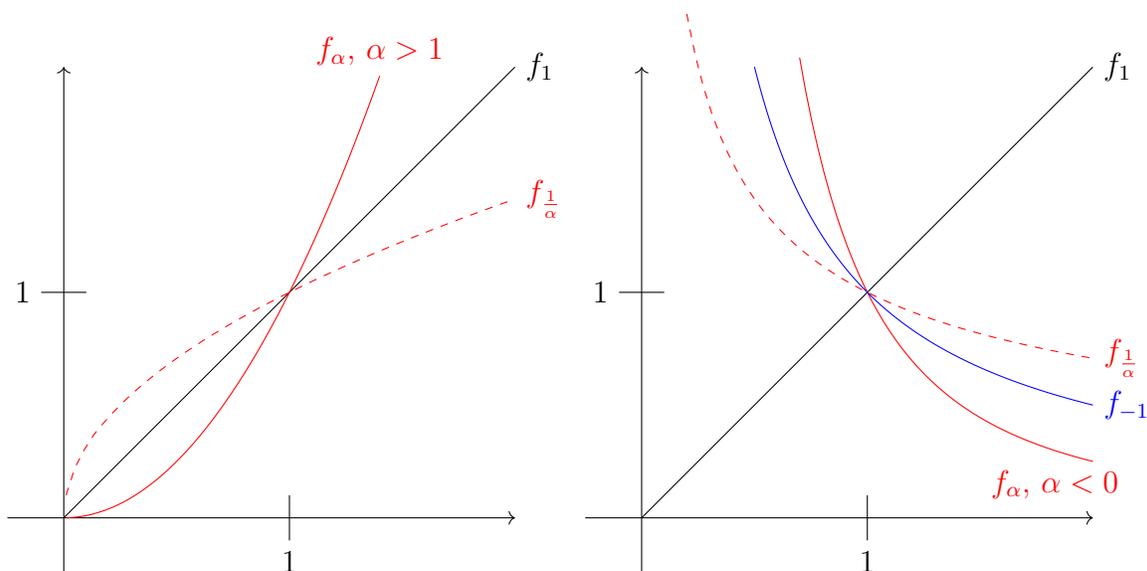
2. Dérivée de $x \mapsto (x^2 + 1)^{2x-3}$ sur \mathbb{R} .

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Proposition 22.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha < \beta$, alors

- $\forall x \in]0, 1[, f_\alpha(x) > f_\beta(x)$.
- $\forall x \in]1, +\infty[, f_\alpha(x) < f_\beta(x)$.

**2.4 Croissances comparées****Proposition 23.**

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

Corollaire 24.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

- Si $\beta > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$.

- Si $b > 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x |x|^\alpha = 0$.

En particulier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x |x|^\alpha = 0$.

Exemples 16.

1. $e^x + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x, x^2 + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2,$

2. $e^x + x^{17} \underset{+\infty}{\sim} e^x.$

3. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x}}$?

2.5 Logarithme en base a

Définition 6. Soit a un réel strictement positif différent de 1. La fonction logarithme en base a , notée \log_a est la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par la relation

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Remarque fondamentale : ainsi définie, cette fonction \log_a vérifie le fait que pour tout réel strictement positif x et tout réel y , on a l'équivalence

$$a^y = x \iff y = \log_a(x)$$

En effet $a^y = e^{y \cdot \ln a}$, donc il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} a^y = x &\iff e^{y \cdot \ln a} = x \\ &\iff y \cdot \ln a = \ln x \iff y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Autrement dit, tout comme \ln est la fonction réciproque de $\exp|_{\mathbb{R}_+^*}$, la fonction \log_a est la fonction réciproque de la fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* , $y \mapsto a^y$. \ln peut être alors vue comme étant la fonction logarithme en base e .

Exemples remarquables : la fonction logarithme en base 10 est notée logiquement \log_{10} et est définie pour $x > 0$ par

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Il s'agit de la fonction réciproque de $y \mapsto 10^y$, de sorte que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\log_{10}(10^y) = y$, et pour tout $x > 0$ on a $10^{\log_{10}(x)} = x$.

Cette fonction est utilisée dans d'autres sciences, comme la SI (diagramme de Bode) ou la chimie, où par exemple le pH d'une solution est défini par la relation

$$pH = -\log_{10}([H^+])$$

En informatique, vous avez peut-être croisé le logarithme en base 2, qui donne par exemple le nombre de chiffres dans l'écriture binaire d'un entier naturel n . En effet, n possède c chiffres dans cette écriture si et seulement si $2^{c-1} \leq n < 2^c$ ce qui équivaut encore par stricte croissance de \log_2 à

$$c - 1 \leq \log_2(n) < c$$

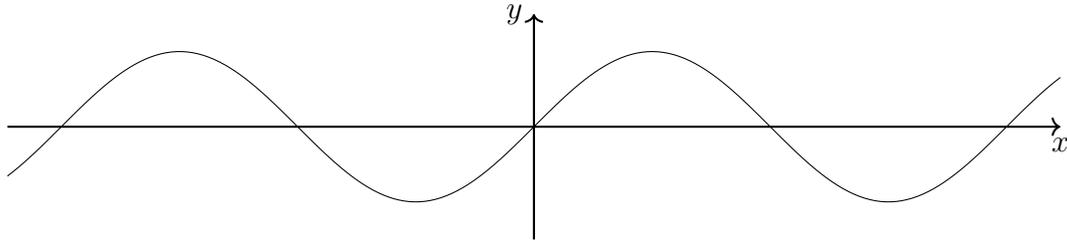
et donc $c = \lfloor \log_2(n) + 1 \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

3 Fonctions circulaires et réciproques

3.1 sin, arcsin

Rappel: La fonction \sin est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, impaire et 2π -périodique. Son image vaut $[-1, 1]$ et sa dérivée \cos .

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$



La restriction de \sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est continue, strictement croissante et $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.
 La fonction $\sin \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}^{[-1, 1]}$ est donc bijective.

Définition 7. Pour tout $y \in [-1, 1]$, on note $\arcsin(y)$ l'unique antécédent dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de y par \sin . On définit ainsi une fonction :

$$\arcsin : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{cases} ,$$

qui vérifie $\text{Im}(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x \text{ et } \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$$

Connaissant quelques valeurs remarquables de la fonction \sin , on en déduit quelques valeurs de la fonction \arcsin :

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

et donc

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Exemple 17. Que vaut $\arcsin(\sin(x))$ si $x \in [0, \pi]$?

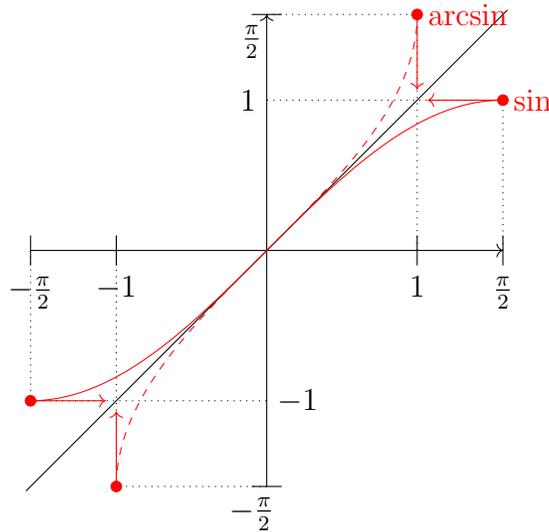
Proposition 25.

- La fonction \arcsin est impaire, strictement croissante et continue.
- Elle est dérivable en tout point de $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Elle n'est dérivable ni en 1 ni en -1 mais son graphe admet en ces points des tangentes verticales

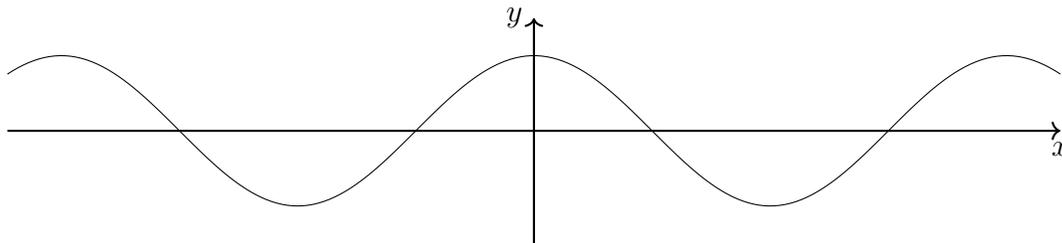
Remarque. On a $\arcsin(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.



3.2 cos/arccos

Rappel: La fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et croissante sur $[-\pi, 0]$, paire et 2π -périodique. Son image vaut $[-1, 1]$ et sa dérivée $-\sin$.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \underset{x \rightarrow 0}{0}(x^3)$$



La restriction de cos à $[0, \pi]$ est continue, strictement décroissante et $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. On a donc $\cos|_{[0, \pi]}^{[-1, 1]}$ bijective.

Définition 8. Pour tout $y \in [-1, 1]$, on note $\arccos(y)$ l'unique antécédent dans $[0, \pi]$ de y par cos. On définit ainsi une fonction :

$$\arccos : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos(x) \end{cases} ,$$

qui vérifie $\text{Im}(\arccos) = [0, \pi]$.

Remarque: La fonction $\arccos|_{[0, \pi]}^{[-1, 1]}$ est la bijection réciproque de $\cos|_{[0, \pi]}^{[-1, 1]}$.

On a donc

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x \text{ et } \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x$$

Connaissant quelques valeurs remarquables de la fonction cos, on en déduit quelques valeurs de la fonction arccos :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

et donc

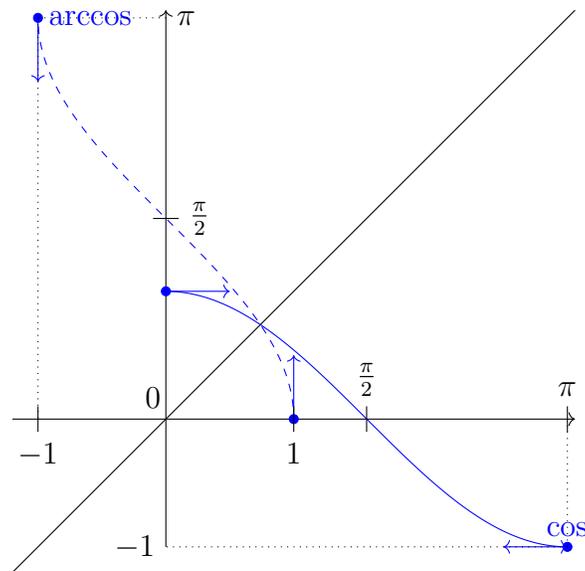
x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arccos(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Proposition 26.

- La fonction arccos est strictement décroissante et continue.
- Elle est dérivable en tout point de $] - 1, 1[$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Elle n'est dérivable ni en 1 ni en -1 mais son graphe admet en ces points des tangentes verticales



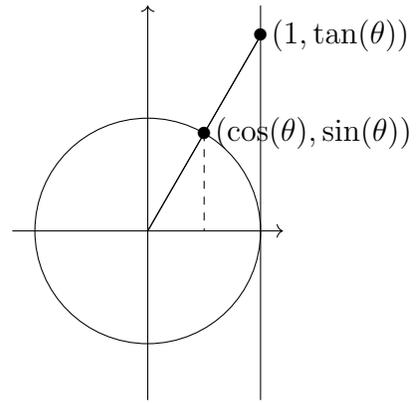
Proposition 27.

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

3.3 tan, arctan

Définition 9. On définit la fonction

$$\tan : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases}$$



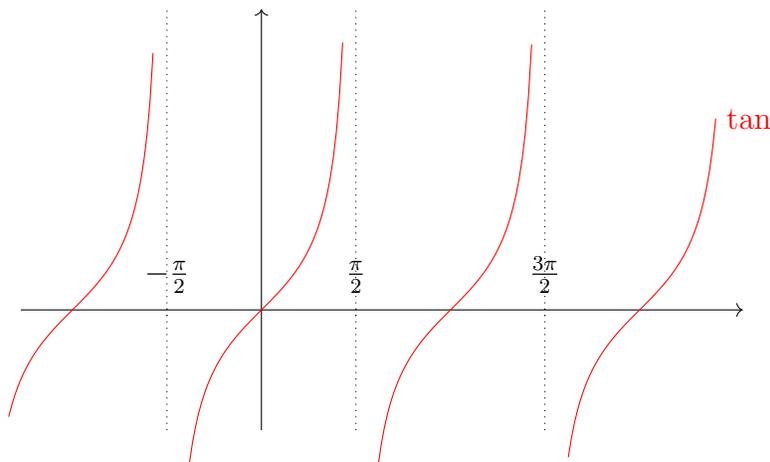
Proposition 28.

- La fonction \tan est strictement croissante sur tout intervalle de la forme $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$, $k \in \mathbb{Z}$, π -périodique et impaire.
- Elle est dérivable sur son domaine de définition et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

- On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$



Définition 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\arctan(x)$ l'unique antécédent dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ de \tan . On définit ainsi une fonction

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \arctan(x) \end{cases},$$

avec $\text{Im}(\arctan) = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

La fonction $\arctan \mid]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la bijection réciproque de $\tan \mid]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan \arctan(x) = x \text{ et } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \arctan(\tan(x)) = x$$

Connaissant quelques valeurs remarquables de la fonction \tan , on en déduit quelques valeurs de la fonction \arctan :

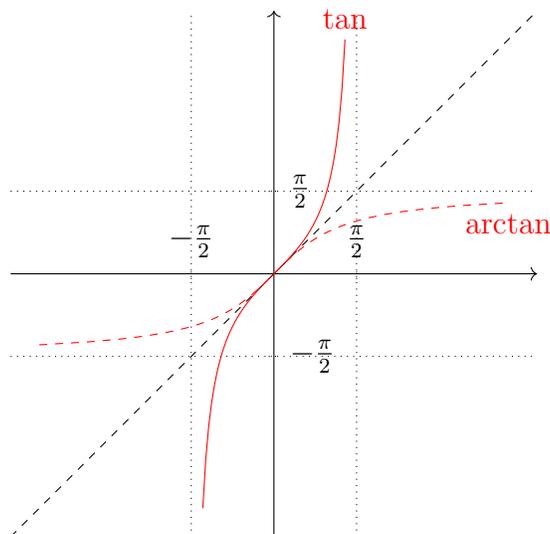
θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(\theta)$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

et donc

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Proposition 29.

- La fonction \arctan est impaire, strictement croissante et continue.
- Elle est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.



Remarque. On a $\arctan(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Proposition 30.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4 Fonctions hyperboliques

Définition 11. Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notée respectivement ch et sh, sont définies sur \mathbb{R} par les relations :

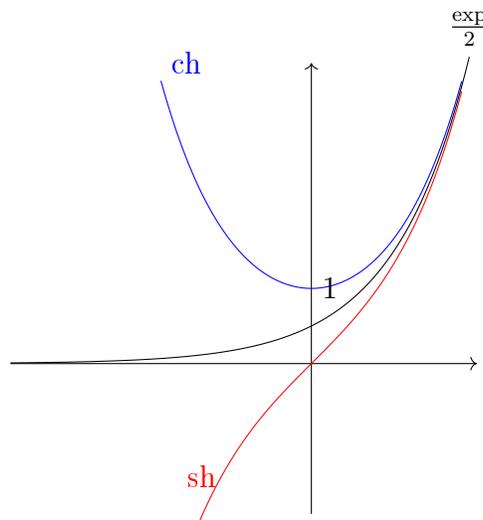
$$\boxed{\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

Théorème 31.

- ch est paire, sh est impaire.
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \text{ch}(x) + \text{sh}(x)$ et $e^{-x} = \text{ch}(x) - \text{sh}(x)$.
- Les fonctions ch et sh sont dérivables et $\text{ch}' = \text{sh}$, $\text{sh}' = \text{ch}$.

On a

$$\boxed{\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \text{ et } \text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)}$$



Proposition 32 (relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1.$$

Remarque. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(b)\text{ch}(a)$ et $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$.

5 Fonctions complexes

5.1 généralités

Définition 12. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On appelle partie réelle et partie imaginaire de f les fonctions :

$$\mathcal{R}e(f) : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{R}e(f(x)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m(f) : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{I}m(f(x)) \end{cases} .$$

Exemple 18. $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & 2x + 3ix^2 \end{cases} .$

Définition 13. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. Si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont dérivables sur I , alors on dit que f est dérivable sur I et on pose

$$\forall a \in I, f'(a) = \mathcal{R}e(f)'(a) + i\mathcal{I}m(f)'(a).$$

On définit ainsi une fonction appelée dérivée de f .

5.2 Exponentielle complexe

Définition 14. Pour tout $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $e^z = e^x e^{iy}$ c'est-à-dire $e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$.

Proposition 33.

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable en a , alors la fonction $f : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{cases}$ est dérivable en a , de dérivée $f'(a) = u'(a)e^{u(a)}$.

Corollaire 34.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $x \mapsto e^{\alpha x}$ se dérive en $x \mapsto \alpha e^{\alpha x}$.

Exemple 19. Déterminer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$.