Lycée du Parc
PCSI 842 | Année 2025-2026
DM 2

# Devoir maison 2 .

*à rendre pour tous le 3 novembre*

---

**Exercice 1.**

Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1. $f$ est-elle injective ?
2. Selon la valeur de $\omega \in \mathbb{C}$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(z) = \omega$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.
   $f$ est-elle surjective ?
3. Déterminer l'image directe $f(\mathbb{U})$, où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des complexes de module 1.
4. Montrer que $f^{-1}[-2, 2] \subset \mathbb{U}$. A-t-on l'égalité ?
5. Déterminer $f^{-1}\mathbb{R}$.
6. On note $g$ la restriction de $f$ à $I = [1, +\infty[$. Montrer que $g$ est bijective de $I$ sur $J$ un ensemble à préciser.
7. Expliciter $g^{-1}$.

**Exercice 2.**

1. Résoudre $z = 1 - \overline{z} + 2i$.
2. Déterminer l'image de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & |z| + z \end{array} \right.$.

**Exercice 3.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme double $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} 2^j$.

1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Démontrer que $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
4. Déterminer la valeur de la somme double $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.