

Correction du DM 1

1. Donner une équivalent de h en $0, +\infty$ et $-\infty$.

- On a $\lim_{x \rightarrow 0} = 1$ donc $h(x) \sim_0 1$.
- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{e^x}{x} = 1$ donc $h(x) \sim_{-\infty} -x$.
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x}{e^x} = 1$ par croissance comparée donc $h(x) \sim_{+\infty} e^x$.

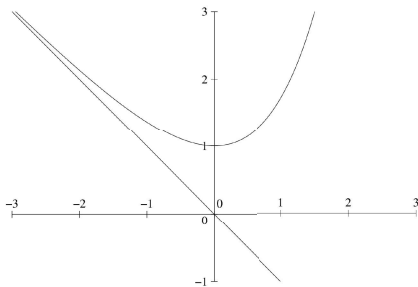
2. Étudier la fonction $h(x) = e^x - x$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On précisera notamment si elle est dérivable, on dressera son tableau de variations ainsi qu'une allure de son graphe en précisant s'il possède ou non des symétries.

La fonction h est dérivable comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - 1$. Sa limite en $+\infty$ est $+\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ en utilisant les équivalents trouvés à la question 1.

On en déduit le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		↘ 1 ↗	

On peut également remarquer que $h(x) + x$ tend vers 0 en $-\infty$, par conséquent le graphe de h admet la droite $y = -x$ pour asymptote en $-\infty$. On remarque que h n'est ni paire ni impaire, le graphe de f n'admet donc a priori aucune symétrie. Le graphe de h est donc:



3. Dédurre de la question précédente que pour tout réel x non-nul, il existe un unique réel non-nul y différent de x tel que $h(x) = h(y)$.

Soit x un réel non-nul, alors $h(x) > 1$. On a $h(x) \in]1, +\infty[$ et $h(\mathbb{R}_-^*) =]1, +\infty[$ donc il existe un antécédent y_1 de $h(x)$ dans $h(\mathbb{R}_-^*) =]1, +\infty[$. La fonction $h|_{\mathbb{R}_-^*}$ est strictement décroissante donc injective, par conséquent, cet antécédent est unique. De même, $h(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$ donc il existe un antécédent y_2 de $h(x)$ dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $h|_{\mathbb{R}_+^*}$ est strictement croissante donc injective, par conséquent, cet antécédent est unique. On a donc exactement deux solutions distinctes à l'équation $h(x) = h(y)$ d'inconnue y . Il est clair que x est une des solutions, par conséquent:

Pour tout x non-nul, il existe un unique y non-nul distinct de x tel que $h(x) = h(y)$

Dans toute la suite, on note $f(x)$ cet unique réel. On définit ainsi une fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ qui à x associe $f(x)$.

4. Dédurre de l'étude de h faite à la question 1 que $(x < x') \Rightarrow (f(x) > f(x'))$. On différenciera trois cas: $0 < x < x'$, $x < 0 < x'$ et $x < x' < 0$. En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Dans un premier temps, on remarque que par définition de f , pour tout réel x on a $h(f(x)) = h(x)$. De plus, si x est strictement positif, alors $f(x)$ est strictement négatif et réciproquement, si $x < 0$ alors $f(x) > 0$. En effet, en vertu de ce qui précède, pour tout réel x , les deux solutions de l'équation $h(y) = h(x)$ (qui sont par définition x et $f(x)$), sont l'une strictement négative et l'autre strictement positive. En particulier, elles sont de signe opposé. On en déduit donc dans un premier temps que si $x < 0 < x'$, alors $f(x) > 0 > f(x')$ et en particulier,

$$\forall x < 0 < x', f(x) > f(x')$$

Soient maintenant x et x' deux réels tels que $0 < x < x'$. Alors $f(x)$ et $f(x')$ sont strictement négatifs. De plus, h étant croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $h(x) \leq h(x')$ donc $h(f(x)) \leq h(f(x'))$. Or, h étant décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$, on a $f(x') \leq f(x)$.

De la même manière, on montre que si $x < x' < 0$, alors $f(x) > f(x')$. On en déduit notamment que

La fonction f est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(f(x)) = x$.

Soit x un réel. Par définition, $f(f(x))$ est l'unique réel y différent de $f(x)$ tel que $h(y) = h(f(x))$. Or on sait que $h(f(x)) = h(x)$ et $f(x) \neq x$ donc nécessairement $y = f(x)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(f(x)) = x$$

En déduire que f est bijective. On précisera sa réciproque f^{-1} . Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?

On peut utiliser le résultat du cours: il existe une fonction qui composée à droite et à gauche de f donne l'identité, f est donc bijective et sa bijection réciproque est cette fonction (ici f) donc $f^{-1} = f$. Comme le graphe de f et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice, on en déduit que

le graphe de f est symétrique par rapport à la première bissectrice

6. On veut retrouver les résultats de la question précédente avec des bijections induites.

- (a) La fonction h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc injective et $h(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$. Elle induit donc une bijection $\varphi = h|_{]0, +\infty[}^{]1, +\infty[}$.

De même, h est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ donc injective et $h(] -\infty, 0[) =]1, +\infty[$ donc elle induit une bijection $\psi = h|_{] -\infty, 0[}^{]1, +\infty[}$. On a bien $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}^*$ et φ définie sur un sous-intervalle de $\mathbb{R}^+$.

J'ai vu beaucoup de " et prend ses valeurs dans" ce qui est très imprécis ! ça ne donne qu'une inclusion. Attention aussi à ne pas simplement dire que $\text{Im}(h) =]1, +\infty[$, cela ne garantit pas que la corestriction soit surjective (il faut restreindre la corestriction à son image à elle, qui peut être différente de celle de h). Enfin, on évite les notations hybrides qui n'ont pas de sens du style $\text{Im}(]0, +\infty[)$

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $h(f(x)) = h(x)$ donc

- Si $x > 0$, $f(x) < 0$, on a donc $\varphi(x) = \psi(f(x))$ ce qui est équivalent à $f(x) = \psi^{-1} \circ \varphi(x)$.
- Si $x < 0$, $f(x) > 0$, on a donc $\psi(x) = \varphi(f(x))$ ce qui est équivalent à $f(x) = \varphi^{-1} \circ \psi(x)$.

Au final, on a

$$f(x) = \begin{cases} \psi^{-1} \circ \varphi(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi^{-1} \circ \psi(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(c) Soit $x < y$, on a trois cas possibles:

- Si $x < 0 < y$, dans ce cas $f(x) > 0$ et $f(y) < 0$, on a donc $f(y) < 0 < f(x)$.
- Si $0 < x < y$, alors $f(x) > f(y)$ car $\psi^{-1} \circ \varphi$ est strictement décroissante en tant que composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante.
- Si $x < y < 0$, alors $f(x) > f(y)$ car $\varphi^{-1} \circ \psi$ est strictement décroissante en tant que composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante.

Dans tous les cas, on a $f(x) > f(y)$ donc f est strictement décroissante.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On raisonne par disjonction de cas.

- Si $x > 0$, alors $f(x) = \psi^{-1} \circ \varphi(x)$ et $f(x) < 0$ donc $f(f(x)) = \varphi^{-1} \circ \psi(f(x))$. On a donc $f \circ f(x) = \varphi^{-1} \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi(x) = x$.
- Si $x < 0$, alors $f(x) = \varphi^{-1} \circ \psi(x)$ et $f(x) > 0$ donc $f(f(x)) = \psi^{-1} \circ \varphi(f(x))$. On a donc $f \circ f(x) = \psi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi(x) = x$.

Dans les deux cas, on a $f \circ f(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

On admet que pour tout réel x positif, on a $e^x - e^{-x} \geq 2x$.

7. Montrer que pour tout réel x positif, $h(-x) \leq h(x)$.

On a admis que pour tout réel x positif, on a $e^x - e^{-x} \geq 2x$. On en déduit que

$$h(f(x)) \geq h(-x), \forall x \in \mathbb{R}^+$$

puisque $h(f(x)) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ donc en particulier pour tout x strictement positif.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) > -x$, alors par décroissance de h sur $\mathbb{R}^-$, on aurait $h(f(x)) < h(-x)$ ce qui contredit ce que nous venons de montrer. On a donc

$$f(x) \leq -x, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

En passant à la limite en $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

8. Montrer que pour tout réel x , $f(x) + h(x) = e^{f(x)}$. En déduire la limite de la fonction $f + h$ en $+\infty$. Comment cela se traduit-il en termes de graphe de f et de h ?

Par définition de $f(x)$, on a $h(x) = h(f(x)) = e^{f(x)} - f(x)$ donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + h(x) = e^{f(x)}}$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + h(x) = 0$. En terme de graphes, cela signifie que la distance entre le graphe de f et celui de $-h$ tend vers 0 en $+\infty$. On dit qu'ils sont asymptotiques. Comme le graphe de $-h$ est le symétrique de celui de h par rapport à l'axe des abscisses, cela nous donne l'allure du graphe de f au voisinage de $+\infty$:

le graphe de f est asymptotique au symétrique par rapport à l'axe (0_x) du graphe de h

9. En tenant compte de tous les renseignements obtenus (décroissance, symétrie, prolongement, limites), tracer le graphe de f .

On sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle se prolonge en posant $f(0) = 0$. Par ailleurs, lorsque x tend vers 0, alors $h(x)$ tend vers 1 et l'unique réel non-nul distinct de x tel que $h(x) = h(y)$ tend également vers 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. On sait que le graphe de $-h$ est asymptote en $+\infty$ à f . On obtient l'allure de f sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit le graphe de f par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Correction du DS n 1
