

Nombres complexes

1 Rappels.

1.1 Conjugué et module

Définition 1. Un nombre complexe est un nombre qui s'écrit sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont des réels (forme algébrique du nombre complexe), a s'appelle la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z . On les note : $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$.

Notations: On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Définition 2. Si $z = ib$ avec b réel, on dit que z est un imaginaire pur.

Définition 3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit le conjugué de z , noté $\bar{z}$ par : $\bar{z} = a - ib$.

L'application qui à z associe son conjugué est bijective et sa bijection réciproque est elle-même ($\overline{\bar{z}} = z$).

Proposition 1. $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2$,

- | | | |
|---|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$ • $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$, | | <ul style="list-style-type: none"> • $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$ si $v \neq 0$. |
|---|--|--|

Proposition 2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Définition 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle module de z , noté $|z|$, le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Rappel: Si A et B sont d'affixes respectives z_A et z_B , $|z_B - z_A|$ est égal à la longueur AB .

Notations: On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Cela correspond au cercle trigonométrique.

Proposition 3. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

- | | | |
|---|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $z ^2 = z \cdot \bar{z}$ et $\bar{z} = z$. • $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, uv = u \cdot v$ | | <ul style="list-style-type: none"> • Si $v \neq 0$, $\left \frac{u}{v}\right = \frac{ u }{ v }$ • $z = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$. |
|---|--|--|

Proposition 4. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Re}(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Théorème 5 (Inégalité triangulaire). Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, alors

- $|u + v| \leq |u| + |v|$ et
- $|u + v| = |u| + |v|$ si et seulement si u et v sont positivement colinéaires.

Corollaire 6.

- Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z - z'| \leq |z| + |z'|$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

Exemples 1.

1. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $|1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geq 1$.

2. Montrer que pour tout $z \notin \mathbb{U}$, on a $\left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$

Corollaire 7.

$$\forall u, v \in \mathbb{C}, ||u| - |v|| \leq |u - v|$$

1.2 Écriture exponentielle

Notation: Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Ainsi, son conjugué s'écrit $\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$.

Proposition 8 (Formules d'Euler). Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 9 (Formule de Moivre). $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{ce qui s'écrit encore} \quad & (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \\ & (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \end{aligned}$$

Exemples 2.

1. Linéariser $\cos^2 x, \sin^3 x$. | 2. Linéariser $\cos^n x$.

1.3 Argument

Définition 5. Tout complexe z de module 1 admet une écriture $z = e^{i\theta}$.

Le réel θ n'est pas unique. Cela signifie que l'application $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow U \\ \theta \longmapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$ est surjective mais non injective.

Définition 6. Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = r e^{i\theta}$ où $r > 0$ désigne le module de z . On dit que θ est un argument de z : θ est défini à 2π près. On le choisit souvent entre $-\pi$ et π ou entre 0 et 2π .

On a donc : $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$, avec $z = a + ib$.

Proposition 10.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Remarque. Comment traduire $z \in \mathbb{R}^+$?

Proposition 11.

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$,

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$, | <ul style="list-style-type: none"> • $\arg(z.z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$, • $\forall n \in \mathbb{Z} \arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$. |
|---|--|

1.4 Géométrie

Définition 7. A tout point $M(x, y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe du point M . Le point M est appelé image du complexe z .

On a alors $\|\overrightarrow{OM}\| = |z| = r$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ est l'argument de z .

Cela implique $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Définition 8. Si $M(u)$ et $N(v)$ sont deux points du plan, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égale à $v - u$.

Remarque: Si A, B, C, D sont quatre points distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D , alors

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

Exemples 3.

1. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - a| = |z - b|$ est la médiatrice du segment $[A(a), B(b)]$.

2. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z - a| = r > 0$ est le cercle de centre $A(a)$ et de rayon r .

Proposition 12.

Soit A, B, C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c . Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. A, B et C sont alignés.
2. les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
3. $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$

2 Trigonométrie

2.1 égalité des cos/sin/tan

Proposition 13.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi]$ ou $x \equiv -y[2\pi]$.
- $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - y[2\pi]$
- $\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow x \equiv y[\pi]$

2.2 Factorisation par l'arc moitié

Proposition 14.

Soit p, q deux réels, on a :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et } e^{ip} - e^{iq} = 2ie^{i\frac{p+q}{2}} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

En particulier, on a :

$$1 + e^{iq} = 2e^{i\frac{q}{2}} \cos\left(\frac{q}{2}\right) \text{ et } 1 - e^{iq} = -2ie^{i\frac{q}{2}} \sin\left(\frac{q}{2}\right).$$

Exemples 4.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$
2. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ avec $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

2.3 Formules de trigonométrie

Proposition 15.

Soit a, b réels, on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

on en déduit

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \text{ et } \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Proposition 16.

Soit p, q deux réels, on a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

et

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

3 Équations complexes

3.1 Racines carrées d'un nombre complexe

La fonction réelle notée par $\sqrt{}$ n'existe pas sur $\mathbb{C}$, néanmoins:

Théorème 17.

tout nombre complexe Z admet deux "racines carrées", opposées, $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ telles que $z_1^2 = z_2^2 = Z$ et $z_1 = -z_2$.

Remarque. Si $Z \in \mathbb{R}^+$ alors $z_1 = \sqrt{Z}$ et $z_2 = -\sqrt{Z}$.

Pour les trouver:

1. si Z peut se mettre sous forme exponentielle, alors $Z = re^{i\theta}$ et ses racines carrées sont $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
2. Sinon, on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z = a + ib$. Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ xy \text{ du signe de } b \end{cases}$$

Exemples 5.

1. Déterminer les racines carrées de $i\sqrt{3}$,
2. Déterminer les racines carrées de $1 - i$,
3. Déterminer les racines carrées de $4 + 3i$.

3.2 Polynômes

Proposition 18.

Soit P un polynôme à coefficients complexes, alors $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si P peut s'écrire $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ avec $Q(X)$ un polynôme à coefficients complexes.

Exemple 6. Résoudre $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

Proposition 19.

Le polynôme $aX^2 + bX + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ possède dans $\mathbb{C}$ deux racines (qui peuvent être confondues). Elles s'écrivent : $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ où δ est l'un des deux nombres complexes vérifiant : $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque: On appliquera donc l'une des deux techniques développées dans la section précédente pour déterminer δ .

Exemples 7.

1. Résoudre $2x^2 - 3x + 4 = 0$, puis factoriser $2X^2 - 3X + 4$.
2. Résoudre $x^2 + (1 - i)x - i = 0$

Proposition 20 (Les formules de François Viète).

x_1 et x_2 sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$ ssi $x_1 + x_2 = S$ et $x_1.x_2 = P$.

Exemples 8.

1. Résoudre $x^2 - 9x + 8 = 0$ sans calculer le discriminant.
2. Résoudre $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 3 \end{cases}$

3.3 Racines n -ièmes de l'unité

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier naturel non nul.

Définition 9. Soit a un complexe. On dit qu'un complexe z est une racine n -ième de a si $z^n = a$.

Définition 10. On dit que c'est une racine n -ième de l'unité si $z^n = 1$. L'ensemble des racines n -ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Exemples 9.

1. Déterminer $\mathbb{U}_1$.
2. Déterminons $\mathbb{U}_2$.

Théorème 21 (Description des racines n -ièmes de l'unité). Soit n un entier naturel non nul. Il existe exactement n racines n -ièmes de l'unité qui sont les complexes ω_k définis par

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

De plus, ω_1 est un "générateur" de ces nombres au sens où

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \omega_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega_1^k.$$

Exemples 10.

1. Explicitons $\mathbb{U}_3$. **Notations:** On note j le complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ **Question:** Que vaut $\arg(1+j)$?

2. Explicitons $\mathbb{U}_4$.

Proposition 22.

Pour $n \geq 2$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ vaut 0. Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0.$$

Exemple 11. Calculer le produit des racines n -ièmes de l'unité.

3.4 Racines n -ièmes d'un complexe non nul.

Théorème 23.

[Description des racines n -ièmes d'un complexe non nul]

Soit z_0 un complexe non nul. Il existe exactement n racines n -ièmes de z_0 . En outre, si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ avec $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, alors les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = z_0$ sont les :

$$\omega_k(z_0) = \underbrace{(\sqrt[n]{r_0} e^{i\theta_0/n})}_{\substack{\text{une racine } n\text{-ième} \\ \text{évidente de } z_0}} \times \underbrace{\omega_k}_{\substack{\text{racines } n\text{-ièmes} \\ \text{de l'unité}}} \quad \text{avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Exemples 12.

1. Déterminer — et dessiner — les complexes z tels que $z^4 = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}i$.

2. soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les complexes z tels que

$$(i+z)^n = (i-z)^n$$