Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
Feuille 6

TD 6 : Nombres complexes.

classique demande réflexion

1 Manipulation de nombres complexes

Exercice 1.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z-1| = |z+1|$ en utilisant la conjugaison.

Exercice 2.
Pour tout $z \neq i$, on pose $h(z) = \dfrac{(z+i)}{z-i}$.

1. Montrer que (z est de module 1 et $z \neq i$) $\Leftrightarrow$ ($h(z) \in i\mathbb{R}$).
2. Montrer que $|z| < 1 \Leftrightarrow \mathcal{R}e(h(z)) < 0$.

Exercice 3.
Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
3. Montrer que $f|^{\mathbb{U}}$ est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Exercice 4.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| < \dfrac{1}{2}$, montrer que $|z| > \dfrac{1}{2}$.

2 Géométrie

Exercice 5.
Déterminer l'ensemble des z tel que $\dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.
Déterminer l'ensemble des z tels que $|(1+i)z - 2i| = 2$.

Exercice 7.
Soient a, b réels distincts, $n \in \mathbb{N}^\star$, résoudre $(z-a)^n = (z-b)^n$. Montrer que les solutions sont les affixes de points appartenant à une même droite verticale.

Exercice 8.
On considère l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z+1}\right)^4 = 1$.

1. Donner les solutions de l'équation.
2. Placer les images des solutions sur un dessin.
3. Montrer que les images des solutions appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3 Trigonométrie

Exercice 9.

Résoudre $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$.

Exercice 10.

Résoudre $\cos(2x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 11.

Résoudre $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$.

Exercice 12.

Résoudre $\cos^2(x) + 3\cos(2x) = 4$.

Exercice 13.

Résoudre $0 \leqslant \sin(x)$.

Exercice 14.
Résoudre $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 15.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Exercice 16.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$.

4 Résolution d'équations

Exercice 17.

Calculer les racines carrées des nombres suivants :

— $z_1 = -2$
— $z_2 = i$
— $z_3 = 1 + i$
— $z_4 = \dfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$
— $z_5 = 3 + 4i$
— $z_6 = -3 + 4i$

Exercice 18.

Résoudre $z^5 = 1 - i$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 19.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre $\left(\dfrac{z+2i}{z-i}\right)^n = 1$.

Exercice 20.
Résoudre $z^4 + 8z^2 + 160 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 21.
Résoudre $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$ dans $\mathbb{C}$.

5 Si besoin de davantage d'entrainement

Exercice 22.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\mathscr{R}e(z) = \mathscr{I}m(z) \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$ en utilisant la conjugaison.

Exercice 23.
Soient z, z' deux complexes. Montrer que

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

Exercice 24.
Déterminer l'ensemble des z tel que $\dfrac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$.

Exercice 25.
Déterminer l'ensemble des z tels que $|2iz - 1 + i| = 1$.

Exercice 26.
Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 27.

Résoudre $4\sin(x)\cos(x) = 1$.

Exercice 28.

Résoudre $\cos(2x) - 2\sin^2(x) = 0$.

Exercice 29.

Résoudre $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Exercice 30.

Résoudre $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 31.

Résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 32.

Résoudre $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \geqslant \cos(x)$.

Exercice 33.

Résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 0$.

Exercice 34.
Résoudre $\cos^2(x) - 2\sin x \cos x - \sin^2(x) = 0$.

Exercice 35.
Résoudre $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 36.

Résoudre $z^5 = -2 + 2i$ dans $\mathbb{C}$.

6 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 37.
Soient a, b deux éléments distincts de $\mathbb{U}$. Montrer que pour tout complexe z,

$$u = \frac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{b-a} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 38.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z+1| < \dfrac{1}{2}$, montrer que $\left|z^2+1\right| > \dfrac{3}{4}$.

Exercice 39. ⚙
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $|z| \leqslant |z|^2 + |z-1|$.

Exercice 40.
Soit $z \in \mathbb{U}$, montrer que l'on a $|z+1| \geqslant 1$ ou $\left|z^2+1\right| \geqslant 1$. Peut-on avoir les deux?

Exercice 41.

Résoudre $z^5 = \overline{z}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 42.
Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u + v$ et u^2.
2. En déduire la valeur de $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$.

Exercice 43.
Montrer que

$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

Exercice 44.

Résoudre $|\cos(3x-1)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Memo

— Comment déterminer la partie réelle/imaginaire ?
  — Utiliser la forme exponentielle
  — Se ramener à une forme algébrique $(a + ib)$
  — Utiliser la factorisation par l'arc moitié
— Comment déterminer le module et l'argument ? Se ramener à la forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ en faisant bien attention au signe de ρ.
— Comment transformer une expression trigonométrique ? Cela dépend évidemment de l'expression (de la forme $e^{ip} + e^{iq}$, polynôme en cos ou sin, cos ou sin d'un angle multiple etc).
  — Utiliser la factorisation par l'arc moitié (permet de factoriser toute expression de la forme $e^{ip} \pm e^{iq}$, y compris le cas particulier $e^{ip} = 1$).
  — Utiliser la formule d'Euler pour transformer une puissance en un angle multiple
  — Utiliser la formule de Moivre pour exprimer un cosinus ou sinus d'un angle multiple comme un polynôme en cos ou sin.
  — Utiliser les formules trigonométriques : à partir de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, on retrouve facilement la formule pour transformer une somme du type $\cos p + \cos q$ en un produit.
— Comment déterminer une racine carrée ?
  — Observer s'il n'y a pas de racine connue (évidente)
  — Utiliser la forme exponentielle
  — En dernier recours, poser $z = x + iy$ et résoudre un système
— Comment résoudre une équation complexe ?
  — Appliquer la formule du cours dans le cas d'une équation du type polynôme du second degré, $Z^n = A$ ou $e^z = a$.
  — Se ramener à une équation qu'on sait résoudre (ie, du type ci-dessus) par un changement de variable.