

1 Vrai/faux sur les équivalents

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

affirmation 1. Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $h(x) \sim_{x \rightarrow a} k(x)$, alors

$$f(x) + h(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x) + k(x)$$

.

affirmation 4. si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $f(x) \rightarrow +\infty$, alors

$$\ln(f(x)) \sim_{x \rightarrow a} \ln(g(x))$$

.

affirmation 2. Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $h(x) \sim_{x \rightarrow a} k(x)$, alors

$$f(x)h(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)k(x)$$

.

affirmation 5. Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $h(x) \sim_{x \rightarrow a} k(x)$, alors

$$\frac{f(x)}{h(x)} \sim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{k(x)}$$

.

affirmation 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, f et g strictement positives. Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ alors

$$f(x)^\alpha \sim_{x \rightarrow a} g(x)^\alpha$$

.

affirmation 6. si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $g(x) \rightarrow 0$, alors

$$\ln(f(x)) \sim_{x \rightarrow a} \ln(g(x))$$

.

affirmation 7. Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $g(x) \rightarrow +\infty$, alors $e^{f(x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{g(x)}$.

affirmation 8. Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $g(x) \rightarrow 0$, alors $e^{f(x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{g(x)}$.

affirmation 9. Si $f(x) \equiv g(x)$, alors les fonctions admettent la même limite

affirmation 10. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, alors $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$.

2 Solutions du Vrai/Faux équivalents

Correction 1

FAUX. Considérons par exemple $f(x) = x - 1$, $g(x) = x$ et $h(x) = -x$, $k(x) = 1 - x$ en $+\infty$.

Correction 2

VRAI. si $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ et $\frac{h(x)}{k(x)} \rightarrow 1$, alors $\frac{f(x)h(x)}{g(x)k(x)} \rightarrow 1$.

Correction 3

VRAI. si $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ alors $\frac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha} \rightarrow 1$.

Correction 4

VRAI, on a écrit $f(x) = g(x) + o(g(x))$ puis

$$\ln(f(x)) = \ln(g(x) + o(g(x))) = \ln(g(x)) + \ln(1 + o(1)) \sim \ln(g(x)),$$

car $\ln(g(x)) \rightarrow +\infty$.

Correction 5

VRAI. si $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ et $\frac{k(x)}{h(x)} \rightarrow 1$, alors $\frac{f(x)k(x)}{g(x)h(x)} \rightarrow 1$.

Correction 6

VRAI, on a écrit $f(x) = g(x) + o(g(x))$ puis

$$\ln(f(x)) = \ln(g(x) + o(g(x))) = \ln(g(x)) + \ln(1 + o(1)) \sim \ln(g(x)),$$

car $\ln(g(x)) \rightarrow -\infty$.

Correction 7

FAUX. Par exemple $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x$.

Correction 8

VRAI car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{g(x)} = 1$.

Correction 9

FAUX, il faut supposer que l'une des deux admet une limite! Prenons $f(x) = g(x) = \cos(x)$.

Correction 10

FAUX, prenons par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. C'est vrai si on suppose que leur limite est réelle ET non nulle.
