Lycée du Parc
PCSI 842
Feuille 5

Année 2025-2026

TD 5 : Fonctions usuelles.

classique   demande réflexion

1 Manipulation des équivalents et DLs

Exercice 1.
Donner un équivalent de $\ln(\operatorname{sh}(x))$ en $+\infty$ où $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Exercice 2.
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$.

Exercice 3.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^{2x}}{\sin\sqrt{x} - \ln(1+2\sqrt{x})}$

Exercice 4.
Déterminer un équivalent en 0 de $\dfrac{\ln(1+x^2) + \sin(x) - \tan(x)}{e^x - \cos(x)}$.

Exercice 5.
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 6.
Déterminer un DL1 en 2 de $\ln(x)$.

Exercice 7.
Donner un DL1 en 0 des fonctions suivantes sans calculer leur dérivée :

$$x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)} \text{ et } x \mapsto e^{e^x}$$

2 Étude de fonctions puissances

Exercice 8.
Étudier la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$.

Exercice 9.
Étudier la fonction $g : x \mapsto \sqrt[4]{x^4 - x^3}$.

3 Théorème de croissances comparées et calcul de limites

Exercice 10.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

Exercice 11.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$

Exercice 12.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$.

Exercice 13.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2^x}{x^3}\right)$

Exercice 14.
Déterminer un équivalent de $\ln\left(\cos\left(\dfrac{\ln(x+3)}{e^x + x^2}\right)\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 15.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}$.

4 Résolution d'équations

Exercice 16.
Résoudre $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 17.
Résoudre $e^x + e^{1-x} = e + 1$.

Exercice 18.
Résoudre sur $]0, +\infty[$, $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5 Manipulation des fonctions trigonométriques

Exercice 19.
Simplifier, pour $x \in \mathbb{R}$, les expressions suivantes :

1. $\cos\arctan x$
2. $\arccos\cos(x)$
3. $\arcsin\sin(x)$

Exercice 20.
Simplifier $\arctan\tan x$ pour x non congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

Exercice 21.
Établir la formule suivante en précisant pour quelles valeurs de x elle est vérifiée :

$$\arcsin(\sqrt{x}) - \arcsin\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) - \arcsin(\sqrt{1-x}).$$

Exercice 22.
Simplifier $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3})$.

6 Résolution d'équations trigonométriques

Exercice 23.
Résoudre $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 24.
Résoudre $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.

Exercice 25.
Résoudre $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan x$.

Exercice 26.
Résoudre $\arcsin(\tan x) = x$.

7 Étude de fonctions circulaires

Exercice 27.
Étudier et représenter graphiquement la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right).$$

Exercice 28.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $1 - x \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant 1 - x + x^2$.
2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $1 - x^2 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1 - x^2 + x^4$ puis que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \arctan(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$.
3. En déduire la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^3}$.
4. Enfin, montrer que $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Exercice 29.
Déterminer un équivalent de $\tan\left(\dfrac{x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \cos x}\right)$ en 0.

8 Manipulation des fonctions hyperboliques

Exercice 30.
Simplifier $\mathrm{ch}(\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ en déterminant pour quelles valeurs de x elle est définie.

Exercice 31.
Résoudre $\mathrm{ch}(x) = 2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 32.
Résoudre $3\mathrm{ch}(x) + 2\mathrm{sh}(x) = 3$

Exercice 33.
Démontrer que $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$ en précisant avant les valeurs de x pour lesquelles ces expressions sont définies.

Exercice 34.
Étudier la fonction $\tanh : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Cette fonction est appelée tangente hyperbolique.

9 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 35.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)}$

Exercice 36.
Déterminer un équivalent en 1^- de $\dfrac{1-x^2}{x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 37.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{e^x - \cos(x)}$

Exercice 38.
Donner un DL2 en 0 des fonctions suivantes sans calculer leur dérivée :

$$x \mapsto \left(e^{\sin x} - 1\right)^2 \text{ et } x \mapsto \ln\left(1 + 2\tan(\sin^2(x))\right)$$

Exercice 39.
Étudier la fonction $f : x \mapsto (x+1)^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 40.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$.

Exercice 41.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$.

Exercice 42.

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^3 \ln x$.

Exercice 43.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^2}$.

Exercice 44.
Résoudre $\arcsin(x) = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$.

Exercice 45.
Simplifier $\tan \arcsin x$, $x \in]-1,1[$.

Exercice 46.
Résoudre $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$.

Exercice 47.
Résoudre $\arcsin(1) = \arcsin\left(\dfrac{5}{13}\right) + \arcsin x$.

Exercice 48.
Pour quelle(s) valeur(s) de x l'équation suivante est-elle vérifiée :

$$2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 49.
Soit $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Déterminer son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et sa dérivée.
2. En déduire une expression simplifiée de f

Exercice 50.
Soit $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

1. Déterminer son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et sa dérivée.
2. En déduire une expression simplifiée de f.
3. Retrouver ce résultat à l'aide de formules trigonométriques.

Exercice 51.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos(x)-1)}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

Exercice 52.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+\sin^2(x))}$.

Exercice 53.
Résoudre $2\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) = 3$.

Exercice 54.
Soit $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}(x) - 1. \end{array}\right.$

1. Résoudre $g(x) = 0$.
2. Étudier les variations de g.
3. En déduire une valeur de x telle que $g(x) \leqslant 0$.

Exercice 55.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $e^{\mathrm{sh}(x)} > 1 + x$.

10 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 56.
Déterminer un équivalent en 0 de $\ln\left(1+\sin(\sqrt{1+2x}-1)\right)$.

Exercice 57.
Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{1-x^2}{x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 58.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{(3x-\pi)\cos x}$.

Exercice 59.
Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} e^t \ln(t)\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} e^x(e-1)\ln(x)$

Exercice 60.
Simplifier $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}$.

Exercice 61.

1. Montrer, en utilisant des formules trigonométriques, que
$$\forall x \in]-1,1[, 2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$
2. Retrouvez ce résultat en faisant une étude de fonction.
3. Quel résultat a-t-on si $x \notin [-1,1]$?

Exercice 62.
Tracer la fonction $x \mapsto \arcsin\sin x + \arccos\cos x$.

Exercice 63.
Résoudre $\mathrm{ch}(x) = a$.

Exercice 64.
Résoudre $\mathrm{sh}(x) = a$, pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 65.
Résoudre $\mathrm{sh}(x) = a\mathrm{ch}(x)$, pour $a \in \mathbb{R}$.

Memo

1. Comment déterminer le domaine de définition/dérivabilité ?
   Utiliser son cours (ce qui implique de le connaître sur le bout des doigts).
2. Comment étudier la réciproque d'une fonction bijective ? Utiliser le cours et les résultats sur la monotonie, la continuité, la dérivabilité ou les limites de la réciproque d'une fonction.
3. Comment résoudre une équation avec des fonctions circulaires réciproques ?
   Appliquer une fonction circulaire en prenant garde aux intervalles sur lesquels on travaille pour raisonner par équivalence (ou pour être conscient qu'on ne travaille pas par équivalence et qu'il faut donc ensuite vérifier que les valeurs obtenues sont effectivement solution du problème initial).
4. Comment résoudre une équation avec des fonctions hyperboliques ?
   Poser $X = \mathrm{e}^x$

Correction du TD n 5

Correction 1 On écrit $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2}\left(1 - e^{-2x}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{sh}(x) &= \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) + \ln\left(1 - e^{-2x}\right)\\ &= x - \ln(2) + \ln\left(1 - e^{-2x}\right)\\ &= x\left(1 + \frac{\ln(1 - e^{-2x}) - \ln(2)}{x}\right)\\ &\sim x. \text{ car } \frac{\ln(1 - e^{-2x}) - \ln(2)}{x} \to 0\end{aligned}$$

On a donc $\ln(\mathrm{sh}(x)) \sim_0 +\infty x$.

Correction 2 On écrit :

$$\begin{aligned}x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x) &= x\ln(x) + x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x\ln(x) - \ln(x)\\ &= x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(x)\\ &= -\ln(x)\left(\frac{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} + 1\right)\end{aligned}$$

On a donc $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x) \sim_0 +\infty - \ln(x)$.

Correction 3 On a

— $sqrt 1 + 2x = 1 + x - \frac{(2x)^2}{8} + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

— $e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$

donc $\sqrt{1+2x} - e^{2x} = -\frac{5x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\sqrt{1+2x} - e^{2x} \sim -\frac{5x^2}{2}$.

On a $\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ et $\ln(1 + 2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + o_{x\to 0}(\sqrt{x})$ donc

$$\sin\sqrt{x} - \ln(1 + 2\sqrt{x}) = -\sqrt{x} + o_{x\to 0}(\sqrt{x})$$

puis $\sin\sqrt{x} - \ln(1 + 2\sqrt{x}) \sim_{x\to 0} -\sqrt{x}$. On en déduit donc $\frac{\sqrt{1+2x} - e^{2x}}{\sin\sqrt{x} - \ln(1 + 2\sqrt{x})} \sim_{x\to 0} -\frac{5x\sqrt{x}}{2}$ donc la limite est nulle.

Correction 4 On a

$$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 + o_{x\to 0}(x^2),$$

et $\sin(x) - \tan(x) = x + o(x^2) - x + o(x^2) = o_{x\to 0}(x^2)$ donc $\ln(1 + x^2) + \sin(x) - \tan(x) \sim_{x\to 0} x^2$.

On a également $e^x = 1 + x + o_{x\to 0}(x)$ et $\cos(x) = 1 + o_{x\to 0}(x)$ donc $e^x - \cos(x) = x + o_{x\to 0}(x)$ ce qui implique $e^x - \cos(x) \sim_{x\to 0} x$. On en déduit que

$$\frac{\ln(1 + x^2) + \sin(x) - \tan(x)}{e^x - \cos(x)} \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} \sim x.$$

Correction 5 On a $\frac{1}{x} \to 0$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $\ln(1+y) \sim_{y\to 0} y$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$.

Correction 6 On écrit $x = 2 + h$ avec $h \to 0$ quand $x \to 2$. On a

$$\ln(x) = \ln(2 + h) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) = \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + o(h^2) = \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o_{h\to 0}(h^2).$$

On n'oublie pas de revenir à x, le DL demandé est

$$\ln(x) = \ln(2) + \frac{(x-2)}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + o_{x\to 2}\left((x-2)^2\right).$$

On vérifie que le premier terme du DL ($\ln(2)$ a bien même limite que $\ln(x)$ quand x tend vers 2) et SURTOUT on ne développe pas $(x-2)^2$

Correction 7 On sait que $\sin x$ tend vers 0 quand $x \to 0$ donc $\frac{1}{1 + \sin(x)} - 1 \sim_{x\to 0} \sin(x)$ puis $\frac{1}{1 + \sin(x)} - 1 \sim_{x\to 0} x$ car $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$. On a donc

$$\frac{1}{1 + \sin(x)} = 1 - x + o_{x\to 0}(x)$$

On sait que $e^x \to 1$ quand $x \to 0$. On a $e^{e^x} - e = e\left(e^{e^x-1} - 1\right)$. Comme $e^x - 1 \to 0$, on a $e^{e^x-1} - 1 \sim_0 x \to 0 e^x - 1$ puis, comme $e^x - 1 \sim_0 x \to 0 x$, on obtient $e^{e^x-1} - 1 \sim_{x\to 0} x$. En multipliant par e, on obtient

$$e\left(e^{e^x-1} - 1\right) \sim_{x\to 0} ex$$

d'où

$$e^{e^x} = e + ex + o_{x\to 0}(x)$$

Correction 8 La fonction est définie pour tout x non nul tel que $x(x+2)$ est positif donc sur $]-\infty,-2]\cup]0,+\infty[$. Elle est dérivable sur $]-\infty,2[\cup]0,+\infty[$ son domaine de définition et on a :

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\sqrt{x(x+2)} + \frac{2x+2}{2\sqrt{x(x+2)}}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2-2}{x\sqrt{x(x+2)}}e^{\frac{1}{x}}.$$

On a :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} x\sqrt{1+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

par croissances comparées et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Correction 9 Elle est définie lorsque $x^4 - x^3 \geqslant 0$ c'est-à-dire pour $x \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$. Elle est dérivable lorsque $x^4 - x^3 > 0$ c'est-à-dire sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$. Pour tout $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, on écrit :

$$g(x) = \exp\frac{1}{4}\ln(x^4 - x^3),$$

on a donc :

$$g'(x) = \frac{1}{4}\frac{4x^3-3x^2}{x^4-x^3}\sqrt[4]{x^4-x^3} = \frac{1}{4}\frac{4x-3}{x^2-x}\sqrt[4]{x^4-x^3}.$$

Il n'y a pas de forme indéterminée dans les limites, on a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0		1	$\nearrow$	$+\infty$

Correction 10 On passe à la forme exponentielle : $x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$. Par le théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$.

Correction 11 On passe à la forme exponentielle : $x^{\sqrt{x}} = \exp\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$. Par le théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln(x) = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} = 1$.

Correction 12 On passe à la forme exponentielle : $x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$. Comme $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x} = -\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$.

Remarque. Ici, pas de forme indéterminée donc pas besoin d'invoquer le théorème de croissances comparées.

Correction 13 On a $2 > 1$ donc, par le théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x}{x^3}\right) = +\infty$.

Correction 14 On a $\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2} = \ln(x+3)e^{-x}\frac{1}{1+e^{-x}x^2}$. Par le théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^2 = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}x^2} = 1$. On a donc $\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2} \sim_{x\to+\infty} \ln(x+3)e^{-x}$. On peut faire mieux en écrivant $\ln(x+3)e^{-x} = e^{-x}\ln(x)\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$, on a donc $\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2} \sim e^{-x}\ln(x)$.

Par le théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)e^{-x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{e^x+x^2} = 0$, on peut donc écrire

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)\right) = \ln\left(1+\underbrace{\left(\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)-1\right)}_{\to 0}\right),$$

on a donc

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)\right) \sim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)-1,$$

puis, toujours parce que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+3)}{e^x+x^2} = 0$, on a

$$\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)-1 \sim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)^2.$$

Enfin, en utilisant l'équivalent trouvé au début, on a

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)^2 \sim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\ln^2(x)e^{-2x}.$$

Correction 15 On a $\tan(x) = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ donc :

$$\tan(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}.$$

Quand x tend vers 0, le dénominateur tend vers 1 et le numérateur tend vers 0 par le théorème de croissances comparées. En passant à l'exponentielle, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x} = 1.$$

Correction 16 On remarque tout d'abord que 0 est solution. Soit maintenant $x>0$. On a :

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = x\ln(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \ln x(\sqrt{x}-\tfrac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 2\sqrt{x} = x \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc 0, 1 et 4.

Correction 17 On a $e^x + e^{1-x} = e+1 \Leftrightarrow e^x + \frac{e}{e^x} = e+1$. On pose $X = e^x$, on a alors $X^2-(1+e)X+e = 0$, le discriminant $\Delta = (1-e)^2$ donc il y a deux racines mais une seule positive : $\frac{e}{2}$, la solution recherchée est donc x tel que $e^x = \frac{e}{2}$ soit $x = 1-\ln 2$.

Correction 18 On a $x = \dfrac{1}{2}$ racine évidente et en cherchant encore, $x = \dfrac{1}{4}$.

On pose $f : x \mapsto x^x = \exp(x\ln(x))$. La fonction f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f'(x) = (\ln(x)+1)\,x^x$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\dfrac{1}{4} \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ et f est strictement décroissante donc injective sur cet intervalle, $\dfrac{1}{4}$ est l'unique solution sur cet intervalle. On a également $\dfrac{1}{2} \in \left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ et f est strictement croissante donc injective sur cet intervalle, $\dfrac{1}{2}$ est l'unique solution sur cet intervalle.

On en déduit que $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4}$ sont les deux seules solutions de cette équation.

Correction 19

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et cos est positif sur cet intervalle. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \cos\arctan x &= \sqrt{\cos^2\arctan x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\arctan(x)}} \text{car } 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2} \end{aligned}$$

   On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Pour $x \in [0,\pi]$, on a $\arccos\cos(x) = x$.
   Pour $x \in [-\pi, 0]$, on a $-x \in [0,\pi]$ et $\cos(-x) = \cos(x)$ donc, d'après ce qui précède, $\arccos\cos(x) = -x$.
   Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 2n\pi \in [-\pi, \pi]$, on a alors :

$$\cos\arccos(x) = \begin{cases} x+2n\pi & \text{si } x+2n\pi \in [0\pi] \\ -(x+2n\pi) & \text{si } x+2n\pi \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

3. Pour $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\arcsin\sin(x)=x$.
Pour $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, on a $\pi-x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(\pi-x)=\sin(x)$ donc, d'après ce qui précède, $\arcsin\sin(x)=\pi-x$.
Enfin, pour $x\in\mathbb{R}$, $\exists n\in\mathbb{Z}$ tel que $x+2n\pi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, on a alors :

$$\sin\arcsin(x)=\begin{cases} x+2n\pi & \text{si } x+2n\pi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ (1-2n)\pi-x & \text{si } x+2n\pi\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\end{cases}$$

Correction 20 Pour $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\arctan\tan(x)=x$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, $\exists n\in\mathbb{Z}$ tel que $x+n\pi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on a alors : $\arctan\tan(x)=x+n\pi$ par π-périodicité de tan.

Correction 21

1. Il faut $x>0$, $x<1$ et $\sqrt{1-x}\in[-1,1]$ ce qui est le cas si $x\in[0,1]$. On a :
$$\begin{array}{rl} & \arcsin(\sqrt{x})-\arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\arcsin(\sqrt{\frac{1}{2}})-\arcsin(\sqrt{1-x}) \\ \Leftrightarrow & \arcsin(\sqrt{x})=\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sqrt{1-x})\end{array}.$$
Comme $\sqrt{x}$ et $\sqrt{1-x}$ sont deux quantités positives, on sait que $\arcsin(\sqrt{x})$ et $\arcsin(\sqrt{1-x})$ appartiennent à $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{1-x}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel sin est injectif donc :
$$\begin{array}{rl} & \arcsin(\sqrt{x})=\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sqrt{1-x}) \\ \Leftrightarrow & \sin\left(\arcsin(\sqrt{x})\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sqrt{1-x})\right) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x}=\cos(\arcsin(\sqrt{1-x}))\end{array}$$
Or, cos est positif sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, donc
$$\cos(\arcsin(\sqrt{1-x}))=\sqrt{1-\sin^2\arcsin\sqrt{1-x}}=\sqrt{x}.$$
La dernière égalité est vraie. Par équivalence, l'égalité initiale est donc vraie pour tout $x\in[0,1]$.

Correction 22 On pose $\beta=\arctan 2+\arctan 3+\arctan(2+\sqrt{3})$. Comme arctan a pour image $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que $\sqrt{3}<2$, on a $\arctan(2)\in\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$. Ceci étant également vrai pour arcsin3 et $\arctan(2+\sqrt{3})$, on a $\beta\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$. Or tan est injective sur $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ donc :
$$\begin{array}{rl} & \beta=\arctan 2+\arctan 3+\arctan(2+\sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow & \tan\beta=\tan\left(\arctan 2+\arctan 3+\arctan(2+\sqrt{3})\right).\end{array}$$
En utilisant la formule $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, on trouve :
$$\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}.$$
Comme $\beta\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, on a $\beta=\frac{7\pi}{6}$.

Correction 23 On remarque que $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)$ ont même signe : positif lorsque x est positif, négatif sinon. On peut donc affirmer que : $x\geqslant 0$. Cela implique :
$$\arctan(x)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\text{ et }\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[.$$
On a :
$$\arctan(x)+\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\arctan(x)=\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{2x}{3}\right),$$
et les deux membres de la deuxième égalité appartiennent à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel tan est injective. On peut donc raisonner par équivalence :
$$\begin{array}{rl} & \arctan(x)=\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)\Leftrightarrow x=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\frac{2x}{3}}{1+\frac{2x}{3}} \\ \Leftrightarrow & x\left(1+\frac{2x}{3}\right)=1-\frac{2x}{3}\Leftrightarrow\frac{2x}{3}x^2+\frac{5x}{3}x-1=0\Leftrightarrow 2x^2+5x-3=0 \\ \Leftrightarrow & x=\dfrac{-5\pm 7}{4} \\ \Leftrightarrow & x=\dfrac{1}{2}\text{car } x\geqslant 0\end{array}$$
L'unique solution est donc $x=\frac{1}{2}$

Correction 24 L'image de arcsin est $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, celle de arccos est $[0,\pi]$ donc, pour qu'il y ait égalité, les deux membres doivent appartenir à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ce qui impose $x\geqslant 0$.
On raisonne par équivalence :

$$
\begin{aligned}
& \arcsin(2x) = \arccos(x) \\
\Leftrightarrow\ & \sin\arcsin(2x) = \sin\arccos(x) \text{car sin est injectif sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
\Leftrightarrow\ & 2x = \sin\arccos(x) \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2 = \sin^2\arccos(x) \text{car les deux membres sont positifs} \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2 = 1 - x^2 \\
\Leftrightarrow\ & 5x^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{car } x \geqslant 0
\end{aligned}
$$

L'unique solution est $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Correction 25 Si $x \in [-1,1]$, on a bien $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$, d'après l'exercice **??**. Les deux membres appartiennent à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc on peut appliquer sin. On obtient :

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sin(\arctan x).$$

En écrivant $\sin = \cos . \tan$ et en simplifiant $\tan(\arctan(x)) = x$, l'égalité devient

$$\frac{2x}{1+x^2} = x . \cos\arctan x$$

et comme cos est positif sur cet intervalle et que $\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$, on a :

$$\cos\arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(\arctan x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

L'équation est donc équivalente à $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ce qui est équivalent à $x = 0$ ou $2 = \sqrt{1+x^2}$ soit $x = \pm\sqrt{3}$. Les solutions sont donc 0 et $\pm\sqrt{3}$.

Correction 26 Si $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cette équation n'a pas de solution car l'image de arcsin est $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus, cette équation n'est définie que si $\tan x \in [-1,1]$ soit $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. On raisonne par équivalence :

$$
\begin{aligned}
& \arcsin\tan(x) = x \\
\Leftrightarrow\ & \tan(x) = \sin(x) \\
& \text{car les deux membres appartiennent à } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \text{ sur lequel sin est injectif} \\
& \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \\
\Leftrightarrow\ & \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \text{car } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}
$$

L'unique solution est $x = 0$.

Correction 27 On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $\frac{1+\sin(x)}{2} \in [0,1]$ ce qui montre que f est définie sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est 2π-périodique, on va l'étudier sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. On sait que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, f n'est donc pas dérivable lorsque $\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} = 1$ c'est-à-dire pour $x \sim_0 \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On sait également que la racine carrée n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas dérivable lorsque $\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} = 0$ c'est-à-dire pour $x \sim_0 -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On peut donc dériver la fonction f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

La dérivée de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}$ est :

$$\frac{\cos(x)}{2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}} = \frac{\cos(x)}{4\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}}.$$

On en déduit que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{\cos(x)}{4\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1+\sin(x)}{2}\right)}} \\
&= -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}\sqrt{1-\sin(x)}} \\
&= -\frac{\cos(x)}{2|\cos(x)|}.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$$

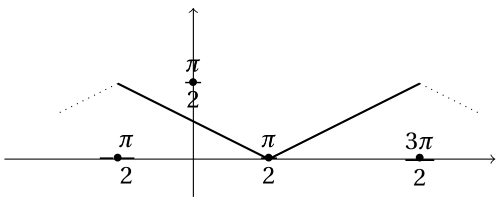
On sait donc qu'il existe deux constantes a et b telles que :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + a & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{x}{2} + b & \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$$

En calculant $f(0) = \frac{\pi}{4}$, on trouve $a = \frac{\pi}{4}$. Par ailleurs, f est continue donc continue en $\frac{\pi}{2}$. On a donc $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ d'où l'on déduit $b = -\frac{\pi}{4}$. Ainsi, on a :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$$

ce qui permet de tracer f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ puis d'en déduire l'allure de f par 2π-périodicité :



Correction 28

1. Soit $x \geqslant 0$, alors
$$1 - x = \frac{1-x^2}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+x},$$
et
$$1 - x + x^2 = \frac{1-(-x)^3}{1-(-x)} = \frac{1+x^3}{1+x} \geqslant \frac{1}{1+x},$$
d'où l'encadrement.
On peut aussi raisonner par équivalence :
$$1 - x \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1 - x + x^3 \Leftrightarrow 1 - x^2 \leqslant 1 \leqslant 1 + x^3$$
car $1 + x > 0$. Le dernier encadrement est vrai donc, par équivalence, on a bien l'encadrement souhaité.
On peut aussi faire deux études de fonctions : $g : x \mapsto \frac{1}{1+x} - 1 + x$ dont la dérivée vaut
$$\forall x \geqslant 0, g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + 1 = \frac{(1+x)^2 - 1}{(1+x)^2} \geqslant 0$$
et $g(0) = 0$ donc $g(x) \geqslant 0 \forall x \geqslant 0$.
On pose $f : x \mapsto g(x) - x^2$. Pour tout $x \geqslant 0$, on a
$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + 1 - 2x = \frac{(1-2x)(1+x)^2 - 1}{(1+x)^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2}{(1+x)^2} \leqslant 0$$
et $f(0) = 0$ donc $f(x) \leqslant 0, \forall x \geqslant 0$.
On a donc bien l'encadrement souhaité.
2. Le résultat précédent est vrai pour tout $x > 0$, il est donc vrai pour $x^2 > 0$. Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [0, x]$, on a
$$1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1 - t^2 + t^4,$$
donc, par croissance de l'intégrale :
$$\int_0^x 1 - t^2 \, dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt \leqslant \int_0^x 1 - t^2 + t^4 \, dt$$
d'où
$$x - \frac{x^3}{3} \leqslant \arctan(x) \leqslant x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$
3. On a
$$0 \leqslant \arctan(x) - x + \frac{x^3}{3} \leqslant \frac{x^5}{5}$$
donc
$$0 \leqslant \frac{\arctan(x) - x + \frac{x^3}{3}}{x^3} \leqslant \frac{x^2}{5}.$$
Par le théorème d'encadrement, on a
$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x) - x + \frac{x^3}{3}}{x^3} = 0,$$
donc on a bien $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Correction 29 On commence par déterminer la limite de ce qu'il y a dans la parenthèse en calculant un équivalent du numérateur et du dénominateur. On écrit $x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x}) = x^2 + o_{x\to 0}(x^2) - x\sqrt{x} + o_{x\to 0}(x\sqrt{x}) = -x\sqrt{x} + o_{x\to 0}(x\sqrt{x})$ donc $x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x}) \sim_{x\to 0} -x\sqrt{x}$, puis $\sqrt{1+x} - \cos(x) = 1 + \frac{x}{2} + o_{x\to 0}(x) - 1 + \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2) = \frac{x}{2} + o_{x\to 0}(x)$, on a donc $\sqrt{1+x} - \cos(x) \sim_{x\to 0} \frac{x}{2}$. On en déduit que
$$\frac{x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \cos x} \sim_{x\to 0} 2\sqrt{x},$$

donc la limite est nulle. Ainsi, on peut écrire :

$$\tan\left(\frac{x^2e^x-\ln(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}-\cos x}\right)\sim_{x\to 0}\frac{x^2e^x-\ln(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}-\cos x},$$

puis

$$\tan\left(\frac{x^2e^x-\ln(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}-\cos x}\right)\sim_{x\to 0}2\sqrt{x}.$$

Correction 30 La racine carrée est définie pour $x^2-1\geqslant 0$ c'est-à-dire $|x|\geqslant 1$. Pour $x\leqslant -1$, on a $x=-\sqrt{x^2}$ donc $x+\sqrt{x^2-1}<0$ et le ln n'est pas défini. Pour $x\geqslant 1$, on a $x+\sqrt{x^2-1}\geqslant 1$ donc le logarithme est bien défini. On écrit :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\\
=\ &\frac{1}{2}\left(e^{x+\sqrt{x^2-1}}+e^{-x-\sqrt{x^2-1}}\right)\\
=\ &\frac{1}{2}\left(e^{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{e^{x+\sqrt{x^2-1}}}\right)\\
=\ &\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\\
=\ &\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x^2-(x^2-1)}\right)\text{en multipliant par la quantité conjuguée}\\
=\ &\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}+x-\sqrt{x^2-1}\right)\\
=\ &x
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x\geqslant 1$, $\mathrm{ch}\left((\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)=x$

Correction 31 On raisonne par équivalence :

$$\mathrm{ch}(x)=2\Leftrightarrow e^x+e^{-x}=4\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+1=0.$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 en e^x dont le discriminant vaut 12. Il possèdent deux racines positives $2\pm\sqrt{3}$, les solutions sont donc $\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$.

Correction 32 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
3\mathrm{ch}(x)+2\mathrm{sh}(x)=3 \quad &\Leftrightarrow 3(e^x+e^{-x})+2(e^x-e^{-x})\\
&\Leftrightarrow 5e^x+e^{-x}-6=0\\
&\Leftrightarrow 5e^{2x}-6e^x+1=0
\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 en e^x dont le discriminant vaut 16. Il y a deux racines : 1 et $\dfrac{1}{5}$ donc les solutions sont $x=0$ et $x=-\ln(5)$.

Correction 33 On sait que $\sqrt{1+x^2}\geqslant|x|$ donc $\sqrt{1+x^2}\geqslant x$ et $\sqrt{1+x^2}\geqslant -x$. Les expressions sont donc définies pour tout $\mathbb{R}$. On remarque ensuite, grâce à la quantité conjuguée, que

$$x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

d'où l'égalité en appliquant ln.

Remarque. On peut aussi écrire directement :

$$\begin{aligned}
\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)\quad &=\ln\left((x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)\right)\\
&=\ln\left((\sqrt{1-x^2}\right)^2-x^2=\ln(1)=0.
\end{aligned}$$

Correction 34 Elle est définie sur tout $\mathbb{R}$ car ch ne s'annule pas. De plus, elle est impaire en tant que quotient d'une fonction impaire et d'une fonction paire. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \tanh'(x)=\frac{\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque. On a également, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\tanh'(x)=1-\tanh^2(x)$.

Pour le calcul des limites, on écrit :

$$\tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}},$$

on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\tanh(x)=1$ puis, par imparité de la fonction, $\lim\limits_{x\to-\infty}\tanh(x)=-1$.

Correction 35 On a

— $\sin(x)=x+o_{x\to 0}(x^2)$ et $\mathrm{sh}(x)=x+o_{x\to 0}(x^2)$ donc $\sin(x)-\mathrm{sh}(x)=o_{x\to 0}(x^2)$.

— $\cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+o_{x\to 0}(x^3)$ et $\mathrm{ch}(x)=1+\dfrac{x^2}{2}+o_{x\to 0}(x^3)$ donc $\cos(x)-\mathrm{ch}(x)=-x^2+o_{x\to 0}(x^3)$.

Ainsi,

$$\frac{\sin(x)-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)-\cos(x)}=\frac{o(x^2)}{-x^2+o(x^2)}=\frac{o(x^2)/x^2}{1+o(x^2)/x^2},$$

avec $\dfrac{o(x^2)}{x^2}\to 0$ donc la limite est nulle.

Correction 36 On pose $x=1-h$ avec $h\to 0^+$. On a $1+x=2-h$ et $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{h}$. On a $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\ln\left(\dfrac{2-h}{h}\right)=\ln(2-h)-\ln(h)\sim-\ln(h)$ car $\lim\limits_{h\to 0^+}-\ln(h)=+\infty$ et $\lim\limits_{h\to 0}\ln(2-h)=\ln(2)$.

On a également $1-x^2=h(2-h)\sim 2h$ lorsque h tend vers 0. On en déduit que $\dfrac{h(2-h)}{1-h}\ln\left(\dfrac{2-h}{h}\right)\sim_{h\to 0}-2h\ln(h)$.. Par croissances comparées, cette limite est nulle lorsque h tend vers 0. On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2-h)}{1-h}\ln\left(\dfrac{2-h}{h}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=0$ et $\dfrac{1-x^2}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\sim_{x\to 1}-2(1-x)\ln(1-x)$

Correction 37 On a $\sin(x)=x+o(x)^2$ donc $\sin^2(x)=x^2+2xo(x^2)+o(x^2)^2=x^2+o(x^3)+o(x^4)=x^2+o(x^3)$ et $\ln(1+x^2)=x^2+o(x^2)$ donc $\ln(1+x^2)-\sin^2(x)=o(x^2)$. On a $e^x-\cos(x)=1+x+o(x)-1+o(x)=x+o(x)$ donc $e^x-\cos(x)\sim x$.

On en déduit que

$$\frac{\ln(1+x^2)-\sin^2(x)}{e^x-\cos(x)}=\frac{o(x^2)}{x+o(x)}=\frac{o(x^2)/x}{1+o(1)}\to 0$$

Correction 38 On sait que $\sin(x)\to 0$ donc $e^{\sin(x)}-1\sim_{x\to 0}\sin(x)$ puis $e^{\sin(x)}-1\sim_{x\to 0}x$ et enfin

$$\left(e^{\sin(x)}-1\right)^2\sim_{x\to 0}x^2$$

On a donc

$$\left(e^{\sin(x)}-1\right)^2=x^2+o_{x\to 0}(x^2).$$

De même, $\sin(x)\to 0$ donc $2\tan(\sin^2(x))\to 0$, on a donc

$$\begin{aligned}\ln\left(1+2\tan(\sin^2(x))\right) &\sim_{x\to 0}2\tan(\sin^2(x))\\ &\sim 2\sin^2 x \text{ car } \tan(y)\sim_{y\to 0}y\\ &\sim 2x^2 \text{ car } \sin x\sim_{x\to 0}2x^2 \text{ donc } \sin^2(x)\sim_{x\to 0}x^2\end{aligned}$$

On a donc $\ln\left(1+\tan(\sin^2(x))\right)\sim_{x\to 0}2x^2$ d'où

$$\ln\left(1+2\tan(\sin^2(x))\right)=2x^2+o_{x\to 0}(x^2)$$

Correction 39 Elle est bien définie et dérivable et sa dérivée vaut :

$$f'(x)=\left(-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\right)\exp\left(-x\ln(x+1)\right)=-\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{(1+x)^{x+1}}\right).$$

La fonction est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Il n'y a pas de forme indéterminée pour les limites, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

Correction 40 On écrit :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2}-x=x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right)=x\left(1+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right)=\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x=\frac{1}{3}.$$

Correction 41 Par le théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}=0$.

Correction 42 Par le théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0+}x^3\ln x=0$.

Correction 43 On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^2}=0$.

Remarque. À nouveau ici, pas de forme indéterminée.

Correction 44 On remarque que $\frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$ donc $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& \arcsin(x) = \arcsin\tfrac{4}{5} + \arcsin\tfrac{5}{13} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \sin\left(\arcsin\tfrac{4}{5} + \arcsin\tfrac{5}{13}\right) \text{ car les deux membres appartiennent à } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{4}{5}\cos\arcsin\frac{5}{13} + \frac{5}{13}\cos\arcsin\frac{4}{5} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{5}{13}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \text{ car } \cos\arcsin \geqslant 0 \text{ donc } \cos = \sqrt{1-\sin^2} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

L'unique solution est $x = \dfrac{63}{65}$.

Correction 45 On écrit :

$$\begin{aligned}
& \tan\arcsin(x) \\
= \; & \frac{\sin\arcsin(x)}{\cos\arcsin(x)} \\
= \; & \frac{x}{\sqrt{\cos^2\arcsin(x)}} \text{ car arcsin appartient à } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sur lequel cos est positif} \\
= \; & \frac{x}{\sqrt{1-\sin^2\arcsin(x)}} \\
= \; & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

On a donc, $\forall x \in]-1,1[$, $\tan\arcsin(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Correction 46 On commence par regarder pour quelles valeurs de x cette équation est définie. arcsin étant définie sur $[-1,1]$, on doit avoir $x, 2x$ et $\sqrt{3}x$ dans cet intervalle, ce qui impose $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a alors $\arcsin(x\sqrt{3}) \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ et $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ donc $\arcsin(x\sqrt{3}) + \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Le sinus étant injectif sur ce segment, l'égalité est équivalente à :

$$\sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arcsin(x\sqrt{3}) + \arcsin(x))$$

ou encore à :

$$2x = x\cos\arcsin x\sqrt{3} + x\sqrt{3}\cos\arcsin x.$$

On a donc $x = 0$ solution évidente. On simplifie les cosinus qui sont positifs et donc égaux à $\sqrt{1-\sin^2}$ et on trouve :

$$2 = \sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}.$$

Ensuite on procède par équivalence :

$$\begin{aligned}
& 2 = \sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \\
\Leftrightarrow\; & 4 = (1-3x^2) + 3(1-x^2) + 2\sqrt{3(1-3x^2)(1-x^2)} \\
\Leftrightarrow\; & \sqrt{3}x^2 = \sqrt{(1-3x^2)(1-x^2)} \\
\Leftrightarrow\; & 3x^4 = 1 - 4x^2 + 3x^4 \\
\Leftrightarrow\; & x^2 = \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\; & x = \pm\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Les solutions trouvées appartiennent bien à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ donc les solutions sont $0, \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

Correction 47 On a $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$. L'équation est équivalente à $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\left(\dfrac{5}{13}\right) = \arcsin(x)$.

Le membre de gauche étant positif, puisque $\arcsin\left(\dfrac{5}{13}\right) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $\arcsin(x) > 0$ donc $x > 0$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin x \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arcsin\frac{5}{13} \\
\Leftrightarrow\quad & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{5}{13} \text{ car les deux membres appartiennent à } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sur lequ} \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\arcsin(x) = \frac{5}{13} \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{\cos^2\arcsin(x)} = \frac{5}{13} \text{ car } \cos\arcsin \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{1-x^2} = \frac{5}{13} \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - x^2 = \frac{25}{169} \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 = \frac{144}{169} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{12}{13} \text{ car } x > 0
\end{aligned}$$

L'unique solution est donc $\dfrac{12}{13}$.

Correction 48 Il faut $x \neq 0$, $\dfrac{1-x}{x} \geqslant 0$ et $2x - 1 \in [-1,1]$ ce qui impose $x \in]0,1]$. Comme $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \geqslant 0$, on a $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) \in [0,\pi]$.

On suppose donc $x \in]0,1]$ et on raisonne par équivalence :

$$
\begin{aligned}
& 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+\arcsin(2x-1)=\frac{\pi}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{2}-2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)=\arcsin(2x-1)\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right)=2x-1\\
& \text{car les deux membres appartiennent à } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ sur lequel sin est injectif}\\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right)=2x-1\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)-1=2x-1\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2}=2x \text{car } \cos^2=\frac{1}{1+\tan^2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2x}{x+1-x}=2x\\
\Leftrightarrow\ & x=x
\end{aligned}
$$

.

La dernière égalité étant vraie, on a montré, par équivalence, que l'équation est vraie pour tout $x\in]0,1]$.

Remarque. On a d'abord réécrit l'équation de façon à ce que chaque membre appartienne à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Correction 49

1. On pose $g : x\mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$. Elle est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ avec,

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \begin{aligned} g'(x) &= 2\sqrt{1-x^2}-\frac{4x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\\ &=\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
g	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On en déduit que $\forall x\in[-1,1]$, $g(x)\in[-1,1]$ ce qui montre que f est bien définie sur $[-1,1]$. Elle est dérivable lorsque $1-x^2\neq 0$ et $2x\sqrt{1-x^2}\neq\pm1$ donc sur $]-1,1[\setminus\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Pour tout $x\in]-1,1[\setminus\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, on a :

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}=\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2\left(1-x^2\right)}}.$$

On a $1-4x^2\left(1-x^2\right)=4x^4-4x^2+1=(1-2x^2)^2$. On obtient donc

$$f'(x)=\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\left|1-2x^2\right|}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 1-2x^2\geqslant 0\\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{sinon}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x\in\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x\in\left]-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup\left]\frac{1}{\sqrt{2}}\right.\end{cases}$$

2. On remarque tout d'abord que f et $2\arcsin$ ont des dérivées égales sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, les deux fonctions sont donc égales à constante près. On a $f(0)=0=2\arcsin(0)$ donc

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right[,\ f(x)=2\arcsin(x).$$

Par ailleurs, f et $-2\arcsin$ ont même dérivée sur les intervalles $\left]-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$, il existe donc deux constantes c_1 et c_2 tel que

$$f(x)=\begin{cases}-2\arcsin(x)+c_1 & \text{si } x\in\left]-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ -2\arcsin(x)+c_2 & \text{si } x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[\end{cases}$$

On évalue f en $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on $\frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient

— $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\left(-\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{4}}\right)=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$ et $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+c_1=\frac{2\pi}{3}+c_1$. On en déduit que $c_1=-\pi$.

— $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ et $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+c_2=-\frac{2\pi}{3}+c_2$. On en déduit que $c_2=\pi$.

Ainsi, on a

$$f(x)=\begin{cases}-2\arcsin(x)-\pi & \text{si } x\in\left]-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ 2\arcsin(x) & \text{si } x\in\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ -2\arcsin(x)+\pi & \text{si } x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[\end{cases}$$

En $x=1$, on a $f(1)=\arcsin(0)=0$ et $-2\arcsin(1)+\pi=-2\times\frac{\pi}{2}+\pi=0$
En $x=-1$, on a $f(-1)=\arcsin(0)=0$ et $-2\arcsin(-1)-\pi=-2\times(-\dfrac{\pi}{2})-\pi=0$. Enfin, en $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on a bien

$$-2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi=-2\times\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{\pi}{2}=2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

et de même en $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (heureusement vu que f est continue!!!).

On obtient donc

$$f(x)=\begin{cases}-2\arcsin(x)-\pi & \text{si } x\in\left[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ 2\arcsin(x) & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\\ -2\arcsin(x)+\pi & \text{si } x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]\end{cases}$$

Correction 50

1. La fonction est définie sur $]-1,1[$ et dérivable sur son domaine de définition. Pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}}=\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Pour tout $x\in]-1,1[$, on a $f'(x)=\arcsin'(x)$ donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in]-1,1[$, $f(x)=\arcsin(x)+\alpha$. Comme $f(0)=0=\arcsin(0)$, on en déduit que $\alpha=0$ donc $\forall x\in]-1,1[$, $f(x)=\arcsin(x)$.

3. Soit $x\in]-1,1[$, alors il existe $u\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x=\sin(u)$. On a alors $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 u}=\cos(u)$ car cos est positif sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sin(u)}{\cos(u)}=\tan(u)=\tan\arcsin(x)$.

   On a donc $\tan(f(x))=\tan(\arcsin(x))$ ce qui implique, par injectivité de tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f(x)=\arcsin(x)$.

Remarque. On peut aussi montrer que l'égalité $f(x)=\arcsin(x)$ est équivalente, en appliquant tan, à $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ ce qui est toujours vrai, et conclure mais cela suppose que l'on connaît l'expression de f.

Correction 51

On a $\cos(x)-1\to0$ donc $\sin(\cos(x)-1)\sim_0 0\cos(x)-1$ et $\cos(x)-1\sim_0 0-\dfrac{x^2}{2}$ d'où $\sin(\cos(x)-1)\sim_0 0-\dfrac{x^2}{2}$.

On sait, de plus, que $\sqrt{1+x^2}-1\sim_0 0\dfrac{x^2}{2}$. On en déduit que :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\cos(x)-1)}{\sqrt{1+x^2}-1}=-1.$$

Correction 52

On a $\sqrt{1+x^2}-1\sim_0 0\dfrac{x^2}{2}$ et $\ln(1+\sin^2(x))\sim_0 0\sin^2(x)\sim_0 0x^2$. On en déduit que $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+\sin^2(x))}\sim_0 0\dfrac{1}{2}$, donc :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+\sin^2(x))}=\frac{1}{2}.$$

Correction 53

On a :

$$\begin{aligned}& 2\mathrm{sh}(x)+\mathrm{ch}(x)=5\\ \Leftrightarrow\ & 2e^x-2e^{-x}+e^x+e^{-x}=6\\ \Leftrightarrow\ & 3e^{2x}-6e^x-1=0\text{en multipliant par } e^x\end{aligned}$$

On reconnaît alors un polynôme de degré 2 en e^x dont le discriminant vaut 48. Les racines de $3X^2-6X-1$ sont $\dfrac{3\pm2\sqrt{3}}{3}$. L'exponentielle étant toujours strictement positive, l'unique solution est $e^x=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$ d'où $x=\ln\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Correction 54

1. On sait que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ donc :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ch}^2(x) - 1 - \mathrm{ch}(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{ch}(x) - 2 = 0.$$

On pose $X = \mathrm{ch}(x)$, alors :

$$X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow (X+1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = 2$$

Comme $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$, on ne peut avoir $\mathrm{ch}(x) = -1$, donc :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ch}(x) = 2.$$

Il suffit donc de résoudre $\mathrm{ch}(x) = 2$. On a :

$$\mathrm{ch}(x) = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0.$$

On pose $Y = e^x$, alors $Y^2 - 4Y + 1 = 0$ a pour racine $Y = 2 \pm \sqrt{3}$, ce qui implique $x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$. Les solutions de $g(x) = 0$ sont donc $\ln(2 \pm \sqrt{3})$

2. La fonction g est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$g'(x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{sh}(x)(2\mathrm{ch}(x) - 1).$$

Comme $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$2\mathrm{ch}(x) - 1 \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

et le signe de $g'(x)$ dépend donc du signe de $\mathrm{sh}(x)$. Ainsi,

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

On a le tableau de variations suivant :

	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
g	$+\infty$ $\searrow$	-2	$\nearrow$ $+\infty$

3. On a $g(0) = -2 \leqslant 0$ donc 0 répond à la question.

Correction 55 On pose $f : x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)} - 1 - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \mathrm{ch}(x)e^{\mathrm{sh}(x)} - 1.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$ donc $e^{\mathrm{sh}(x)} \geqslant 1$ et comme on a également : $\forall x \geqslant 0, \mathrm{ch}(x) \geqslant 1$, on en déduit que $\forall x \geqslant 0, f'(x) \geqslant 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a $f(0) = 0$, on peut donc affirmer, comme $f(0) = 0$, que :

$$\forall x > 0, f(x) > 0,$$

ce qui montre l'inégalité souhaitée.

Correction 56 On remarque que $\lim\limits_{x \to 0} \sin(\sqrt{1+2x} - 1) = 0$ donc

$$\ln\left(\sin(\sqrt{1+2x} - 1)\right) \sim \sin(\sqrt{1+2x} - 1).$$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1+2x} - 1 = 0$ donc

$$\sin\left(\sqrt{1+2x} - 1\right) \sim \sqrt{1+2x} - 1.$$

Enfin, $\sqrt{1+2x} - 1 \sim x$. Ainsi, un équivalent de $\ln\left(1 + \sin(\sqrt{1+2x} - 1)\right)$ en 0 est x.

Correction 57 On commence par regarder ce qu'il y a dans le ln. On a

$$\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1+x+o(x)) = 1 + 2x + o(x).$$

On en déduit que $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \sim 2x$. On peut aussi, si on préfère, écrire

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = o + o(x) - (-x + o(x)) = 2x + o(x).$$

On a $1 - x^2 \sim 1$ donc

$$\frac{1-x^2}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \sim \frac{2x}{x} = 2.$$

La limite cherchée est donc 2.

Correction 58 On écrit $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. On sait que $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sim_{0} \tfrac{\pi}{3} x - \frac{\pi}{3}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{(3x - \pi)\cos x} &\sim_{\frac{\pi}{3}} \frac{2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{(3x - \pi)\cos(x)} \\ &\sim_{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{3\cos(x)} \end{aligned}.$$

Or, $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos(x) = \frac{1}{2}$ d'où $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}$. On a donc $\frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{(3x-\pi)\cos x} \sim_{0\ \frac{\pi}{3}} \frac{4}{3}$.

Correction 59 Pour tout $x > 0$, on écrit $\ln(x)\int_x^{x+1} e^t \,dt \leqslant \int_x^{x+1} e^t \ln(t)\,dt \leqslant \ln(x+1)\int_x^{x+1} e^t\,dt$, d'où, en calculant les intégrales :

$$\ln(x)(e^{x+1}-e^x) \leqslant \int_x^{x+1} e^t \ln(t)\,dt \leqslant \ln(x+1)(e^{x+1}-e^x).$$

Comme $\ln(x+1) \sim_{+\infty} \ln(x)$, on en déduit l'équivalent souhaité.

Correction 60 On note $\alpha = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$. Les réels $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ et $\frac{1}{8}$ sont tous inférieurs à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc, par croissance de arctan, $\arctan\frac{1}{2} < \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ et de même pour $\arctan\frac{1}{5}$ et $\arctan\frac{1}{8}$. On a donc :

$$\alpha < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

et $\alpha > 0$. Comme tan est injective sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} & \alpha = \arctan\tfrac{1}{2} + \arctan\tfrac{1}{5} + \arctan\tfrac{1}{8} \\ \Leftrightarrow\ & \tan\alpha = \tan\left(\arctan\tfrac{1}{2} + \arctan\tfrac{1}{5} + \arctan\tfrac{1}{8}\right). \end{aligned}$$

On sait que $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$. Donc :

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{2} + \tan(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8})}{1 - \frac{1}{2}\tan(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8})}.$$

Or $\tan(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}) = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}$. On a donc $\tan\alpha = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1$.
Comme $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Correction 61

1. Soit $x \in]-1,1[$. On raisonne par équivalence.
   On a $x \in]-1,1[$ donc $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ d'où $2\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par définition de la fonction arctan, on a $\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que les deux membres de l'égalité à montrer appartiennent à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur lequel tan est injectif. On a donc :

$$\begin{aligned} & 2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \tan(2\arctan(x)) = \tan\left(\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right) \text{ car } tan \text{ est injective sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \Leftrightarrow\ & \tan(2\arctan(x)) = \frac{2x}{1-x^2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2\tan\arctan(x)}{1-\tan^2\arctan(x)} = \frac{2x}{1-x^2} \text{ car } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

   La dernière égalité est vraie pour tout $x \in]-1,1[$. Par équivalence, on en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

2. On pose $f(x) = 2\arctan x$ et $g(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$. Les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ donc sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

   et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$

   .

   On a donc $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = g'(x)$, il existe donc $K_1 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = g(x) + K_1$. Pour $x = 0$, on a $f(0) = g(0) = 0$ donc $K_1 = 0$ et les deux fonctions sont égales.

3. On reprend le calcul fait à la question précédente. La fonction $f - g$ est de dérivée nulle, elle est donc constante sur chaque intervalle où elle est dérivable. Il existe donc deux constantes K_1 et K_2 telles que :

$$\forall x \in]-\infty, -1[, f(x) = g(x) + K_1,$$

   et

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = g(x) + K_2.$$

   Pour déterminer K_2, on peut prendre $x = \sqrt{3}$. On obtient $\frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + K_2$ d'où $K_2 = \pi$. On peut aussi faire tendre x vers $+\infty$ ce qui implique $K_2 = \pi$.

Pour déterminer K_1, on peut utiliser l'imparité des deux fonctions et en déduire que $K_1 = -K_2$. On a montré que :

$$\begin{cases} 2\arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) - \pi & \text{si } x < -1 \\ 2\arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) & \text{si } x \in]-1,1[\\ 2\arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) + \pi & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Correction 62 La fonction est 2π-périodique. D'après l'exercice 19, on a :

— Si $x \in [-\pi, 0]$, alors $\arccos\cos(x) = -x$.
— Si $x \in [0, \pi]$, alors $\arccos\cos(x) = x$.
— Si $x \in [\pi, 2\pi]$, alors $\arccos\cos(x) = 2\pi - x$.

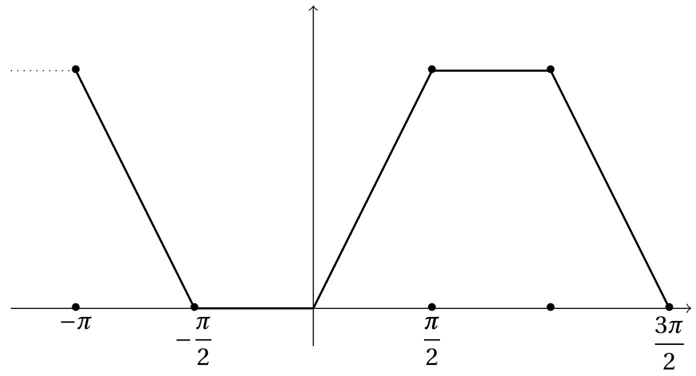
D'après l'exercice 19, on a :

$$\arcsin\sin(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{si } x \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right] \\ x & \text{si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

On en déduit que :

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - 2x & \text{si } x \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \\ \pi - x & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \\ \pi & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

On complète par 2π-périodicité de la fonction :



Correction 63 On sait que $\mathrm{ch}(x) \geqslant \mathrm{ch}(0)$ par parité de la fonction ch donc l'équation n'a pas de solution pour $a < 1$. Si $a \geqslant 1$, on passe à l'expression exponentielle et on cherche à résoudre $e^x + e^{-x} = 2a$ ou encore $e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0$. On calcule le discriminant de ce polynôme de degré 2 en e^x, on trouve $4(a^2-1)$. Il est positif ou nul, les racines de ce polynôme sont donc $\dfrac{2a \pm 2\sqrt{a^2-1}}{2} = a \pm \sqrt{a^2-1}$. On en déduit que l'équation $\mathrm{ch}(x) = a$ admet comme solutions $\ln\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right)$ (et cette solution est unique si $a = 1$).

Correction 64 On raisonne par équivalence :

$$\mathrm{sh}(x) = a \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2a \Leftrightarrow e^{2x} - 2ae^x - 1 = 0.$$

Le polynôme de degré 2 en e^x a pour discriminant $4a^2 + 4$. Il est strictement positif donc le polynôme a deux racines distinctes : $\dfrac{2a \pm 2\sqrt{a^2+1}}{1} = a \pm \sqrt{a^2+1}$. Comme $a - \sqrt{a^2+1} < 0$, on ne peut avoir $e^x = a - \sqrt{a^2+1}$ donc l'unique solution de l'équation est $\ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$.

Remarque. L'application $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est l'expression de la bijection réciproque de sh.

Correction 65 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = a\mathrm{ch}(x) &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = a(e^x + e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow (1-a)e^x = (1+a)e^{-x} \\ &\Leftrightarrow (1-a)e^{2x} = 1 + a. \end{aligned}$$

Si $a=1$, il n'y a pas de solution. Si $a\neq 1$, on doit résoudre $e^{2x}=\dfrac{1+a}{1-a}$. Il faut que $\dfrac{1+a}{1-a}$ soit strictement positif, ce qui est équivalent à $(1+a)(1-a)>0$, on doit donc avoir $a\in]-1,1[$. Si $a\in]-1,1[$, on a $2x=\ln\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)$ d'où $x=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$.