

1 Vrai/faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

affirmation 1. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction, alors $f|_{\text{Im}(f)}$ est surjective.

affirmation 2. Si f est surjective, alors $f \circ g$ est surjective.

affirmation 3. Si g est injective, alors $f \circ g$ est injective.

affirmation 4. Si f est injective, alors tout élément de $\text{Im}(f)$ admet un unique antécédent.

affirmation 5. Si $f \circ g = f \circ h$ et f est bijective, alors $g = h$.

affirmation 6. Si $f \circ g = f \circ h$ et g, h sont bijectives, alors $g = h$.

affirmation 7. Si $f \circ g$ est surjective et f est bijective, alors g est surjective.

affirmation 8. Si $f \circ g$ est injective et f est bijective, alors g est injective.

affirmation 9. Si $A \subset E$ et $B \cap E = \emptyset$ alors $A \cap B = \emptyset$

affirmation 10. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors $A \cap B \neq \emptyset$.

affirmation 11. Si $A \cup \overline{B} = D$, alors $B \cap D = \emptyset$.

affirmation 12. Si $A \cup B = A \cup D$, alors $B = D$

affirmation 13. Si $A \cap B = A \cap D$, alors $B = D$.

2 Solutions du Vrai/Faux calculs algébriques

Correction 1 Vrai car l'image de $f|_{\text{Im}(f)}$ est $\text{Im}(f)$ et c'est également son espace

d'arrivée.

Correction 2 Faux, prenez $f = id_{\mathbb{R}}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$.

Correction 3 C'est faux, prenez $g = id_{\mathbb{R}}$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$.

Correction 4 C'est vrai, tout élément de l'image admet un antécédent par défi-

nition. Par injectivité, cet antécédent est unique.

Correction 5 Vrai, il suffit de composer à gauche par f^{-1} .

Correction 6 Faux, prenez $g = id_{\mathbb{R}}$, $h = -id_{\mathbb{R}}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

Correction 7 Vrai car $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ est la composée de deux fonctions surjectives.

Correction 8 Vrai car $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ est la composée de deux fonctions injec-

tives.

Correction 12 faux, prenez $A = \mathbb{R}_+^*$, $B = \{0\}$ et $D = \mathbb{R}^+$.

Correction 9 Vrai, car $A \cap B \subset E \cap B$.

Correction 13 Faux, prenez $A = B = \mathbb{R}_+$ et $D = \mathbb{R}$.

Correction 10 faux. Prenez $A = \mathbb{R}_+^*$, $B = \mathbb{R}_-^*$ et $E = \mathbb{R}$.

Correction 11 faux, si A n'est pas inclus dans $\overline{B}$. On peut alors trouver $x \in A$ et

$x \notin \overline{B}$ et $x \in A \cap B$. En revanche, si $A \subset \overline{B}$, alors $D = \overline{B}$ et on a bien $D \cap B = \emptyset$.