Devoir d'entrainement 3.

Exercice 1.

On considère la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \end{array}.$$

1. (a) Vérifier que f est bien définie sur $[0,\pi]$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall a,b \in \mathbb{R}^{+*},\ \sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$
   (c) Étudier le signe de $f(x)-\sin x$ pour $x \in [0,\pi]$.
   (d) Montrer que $\forall x \in]0,\pi],\ \sin x < x$.
   (e) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,\pi]$ (on calculera $f(0)$, $f(\pi)$, $f(\frac{\pi}{3})$, $f'(0)$ et $f'(\pi)$) et tracer la courbe représentative de f.

   On considère la fonction suivante : $g: \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos\dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x} \end{array}.$
3. (a) Étudier les variations de la fonction suivante : $\varphi: \begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{4-5t}{5-4t} \end{array}.$
   (b) Montrer que g est bien définie sur $[0,\pi]$ et dérivable sur $]0,\pi[$ et calculer sa dérivée.
   (c) Tracer la courbe représentative de g.
4. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $z \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(x) = f(z)$.
   (b) Calculer $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.
   (c) Calculer $f(g(x))$ et en déduire que $z = g(x)$.
5. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.
   (a) Exprimer $\cos(x+z)$ et $\cos(x-z)$ comme une fraction rationnelle en $\cos x$ uniquement.
   (b) Étudier les variations des fonctions suivantes :
   $$\varphi_1: \begin{array}{rcl} [0,\frac{\pi}{3}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t+g(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi_2: \begin{array}{rcl} [0,\frac{\pi}{3}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t-g(t) \end{array}.$$
   (c) En déduire le signe de $\cos\dfrac{x+z}{2}$ et $\cos\dfrac{x-z}{2}$.
   (d) Exprimer $\cos\dfrac{x+z}{2}$ et $\cos\dfrac{x-z}{2}$ en fonction de $f(x)$.
6. (a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ est bijective à valeurs dans un intervalle J à préciser. On notera h sa bijection réciproque.
   (b) En utilisant les questions précédentes, déterminer la fonction h.

Exercice 2.

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x}{1-e^x} \end{array} \right.$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f(x) + f(-x) = -1$.
   (b) La fonction f est-elle paire? impaire?
   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = f(x) + f^2(x)$.
   (d) Donner le tableau de variations de la fonction. On donnera les limites aux bords de son ensemble de définition.
   (e) Que vaut l'image de f?
   (f) Tracer le graphe de f.
   (g) f est-elle injective? surjective?
2. (a) Montrer que f induit une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J. On précisera ces deux intervalles.
   On note g la bijection réciproque de $f|_I^J$.
   (b) Sans calculer l'expression de g, montrer que g est dérivable sur J et montrer que
   $$\forall x \in J, g'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$
3. Peut-on affirmer que $f|^{\mathrm{Im}(f)}$ est bijective?
4. Déterminer une expression de sa bijection réciproque h.
5. Quel lien a-t-on entre g et h?
6. Retrouver, par le calcul, le résultat de la question 2b

Exercice 3.
L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui vérifient les deux propriétés (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) : \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ f(xy) = f(x)f(y) \qquad \text{(on dit que } f \text{ est multiplicative)}$$
$$(P_2) : \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ f(x+y) \geqslant f(x) + f(y) \qquad \text{(on dit que } f \text{ est sur-additive)}$$

Partie I - Un exemple

Soit $\alpha \geqslant 1$ un réel. On note f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$ (avec la convention $0^\alpha = 0$).

1. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$.
2. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.
   Indication : $x + y = x(1 + \frac{y}{x})$
3. En déduire que la fonction f_α est solution du problème posé.

Partie II - Quelques propriétés

1. Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème étudié ?

Désormais, f désigne une fonction non constante solution du problème.

2. Montrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = f(x)^n$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \neq 0$, et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
6. En déduire que f est strictement croissante.

Partie III - Détermination des solutions

A nouveau, f désigne une fonction non constante solution du problème étudié.

1. Justifier que le nombre $\ln(f(2))$ est bien défini, et que $\ln(f(2)) \geqslant \ln(2)$.
2. Justifier que pour tout réel $x > 0$, il existe un unique entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $2^q \leqslant x < 2^{q+1}$.
3. Soit $x > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on convient de noter q_p l'unique entier tel que $2^{q_p} \leqslant x^p < 2^{q_p+1}$.
   (a) Montrer : $\frac{q_p}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
   (b) Justifier l'encadrement $f(2)^{q_p} \leqslant f(x)^p < f(2)^{q_p+1}$, et en déduire : $\frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} < \frac{q_p+1}{p}$.
   (c) Déduire des questions précédentes qu'on a $f(x) = x^\alpha$ pour une constante $\alpha \geqslant 1$ (indépendante de x) que l'on précisera.
4. Conclure le problème.

Correction du devoir d'entrainement n 3

Correction 1 On considère la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \end{array}.$$

1. (a) Soit $x \in [0,\pi]$. Alors $5-4\cos(x) = 1+4(1-\cos x) \geqslant 1$ donc f est bien définie sur $[0,\pi]$.

   (b) Soit $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, alors

   $$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

   On a bien l'égalité souhaitée.

   (c) Soit $x \in [0,\pi]$. Alors

   $$\begin{aligned} f(x)-\sin(x) &= \sin(x)\left(\frac{1}{\sqrt{5-4\cos(x)}}-1\right) \\ &= \sin(x)\frac{1-\sqrt{5-4\cos x}}{\sqrt{5-4\cos(x)}} \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}\frac{4\cos(x)-4}{\sqrt{5-4\cos(x)}+1} \\ &\text{en utilisant la question précédente} \\ &= \frac{4\sin(x)(\cos x-1)}{(\sqrt{5-4\cos(x)}+1)\sqrt{5-4\cos x}} \end{aligned}$$

   On a $\sin(x) \geqslant 0$ et $\cos(x)-1 \leqslant 0$ donc $f(x)-\sin(x) \leqslant 0$ pour $x \in [0,\pi]$.
   Certains s'en sortent aussi en raisonnant par équivalence et en utilisant $5-4\cos(x) = 1+4(1-\cos x) \geqslant 1$ C'est étrange que vous ne vous soyez pas demandé pourquoi je vous demandais de montrer la formule de la question précédente

   (d) La fonction $x \mapsto x-\sin(x)$ est de dérivée $x \mapsto 1-\cos x$ positive. On en déduit qu'elle est strictement croissante et comme elle vaut 0 en 0, elle est strictement positive pour $x > 0$. On a bien

   $$\forall x \in]0,\pi],\ \sin x < x.$$

   Je ne veux pas croire que certains n'aient pas su faire!!!

   (e) On a vu que pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(x) \leqslant \sin(x)$ et pour tout $x \in]0,\pi], \sin(x) < x$. On a donc

   $$\forall x \in]0,\pi], f(x) < x.$$

   On en déduit que l'unique solution de $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$ est $x = 0$.
   Là, il faut vraiment avoir le réflexe de regarder ce que vous venez de faire, pourquoi vous poserait-on ces questions juste avant?

2. La fonction f est dérivable sur $[0,\pi]$ et $\forall x \in [0,\pi]$,

$$f'(x) = \frac{-2\cos^2 x+5\cos x-2}{(5-4\cos x)^{3/2}}$$

Le polynôme $-2X^2+5X-2$ a pour racines 2 et $\frac{1}{2}$ et il est positif entre les racines. On a donc

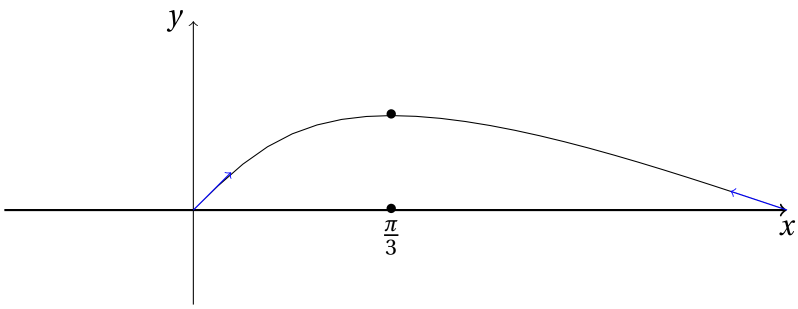
$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

Le tableau de variations de f est donc

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On a
- $f(0) = 0 = f(\pi)$.
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et
- $f'(0) = 1$, $f'(\pi) = -\frac{1}{3}$.

On en déduit la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, \pi]$:



Je crois que personne n'a justifié correctement le signe de la dérivée. En posant le polynôme, vous arrivez à un point d'annulation en $\frac{\pi}{3}$ et, visiblement, vous en déduisez les variations en fonction des valeurs en 0 et π... ça se voit!!!!!

On considère la fonction suivante : $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos \dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x} \end{array} \right.$.

3. (a) On commence par étudier les variations de la fonction suivante $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{4-5t}{5-4t} \end{array} \right.$.

La fonction φ est dérivable sur $[-1,1]$ et

$$\forall t \in [-1,1], \varphi'(t) = -\frac{9}{(5-4t)^2}$$

on a donc le tableau de variations suivant :

x	-1		1
$\varphi'(x)$		$-$	
φ	1	$\searrow$	-1

(b) La fonction arccos est définie sur $[-1,1]$ et d'après le tableau de variations de la question précédente, on a

$$\forall x \in [0,\pi], \cos(x) \in [-1,1] \text{ donc } \varphi(\cos(x)) \in [-1,1].$$

La fonction g est donc bien définie sur $[0,\pi]$.

Certains encadrent numérateur et dénominateur et font un quotient (!!!!!) de ces encadrements....

La fonction arccos étant dérivable sur $]-1,1[$, la fonction g sera dérivable en tout point x vérifiant

$$\varphi(\cos(x)) \neq \pm 1.$$

D'après l'étude de φ, on a

$$\varphi(y) = \pm 1 \Leftrightarrow y = \pm 1,$$

on a donc

$$\varphi(\cos(x)) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \pi.$$

On a donc g dérivable sur $]0,\pi[$.

Me dire que $\varphi(cos(0)) = -1$ et $\varphi(\cos\pi) = 1$ ne suffit pas à justifier la dérivabilité sur $]0,\pi[$, il faut être sûr que ce sont les seules valeurs en lesquelles on a ± 1.

Pour tout $x \in]0,\pi[$, on a

$$\left(\varphi \circ \cos\right)'(x) = -\sin(x)\varphi'(\cos x),$$

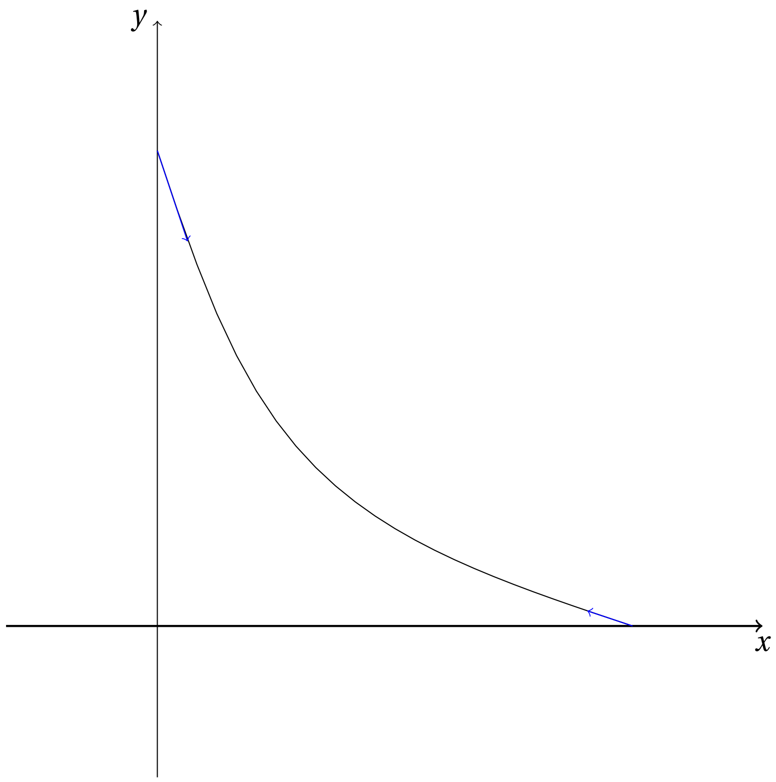
donc

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{-\sin(x)\varphi'(\cos x)}{\sqrt{1-\varphi(\cos x)^2}} \\
&= \frac{-9\sin x}{(5-4\cos x)^2\sqrt{1-\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)^2}} \\
&= \frac{-9\sin x}{(5-4\cos x)\sqrt{(5-4\cos x)^2-(4-5\cos x)^2}} \\
&= \frac{-9\sin x}{(5-4\cos x)\sqrt{(9-9\cos x)(1+\cos x)}} \\
&= \frac{-9\sin x}{3(5-4\cos x)\sqrt{1-\cos^2 x}} \\
&= -\frac{3}{5-4\cos x} \text{ car } \sin(x) > 0
\end{aligned}$$

(c) D'après l'expression de la dérivée trouvée à la question précédente, on a le tableau de variations suivant :

x	0	π
$g'(x)$	$-$	
g	π ↘	0

On a $g'(0) = -3$, $g'(\pi) = -\frac{1}{3}$ et $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$. On en déduit la courbe représentative de g :



Pensez à calculer les tangentes en 0 et π pour tracer correctement la courbe

4. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

   (a) On a $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[0, \frac{1}{2}\right] = f\left(\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]\right)$ d'après le tableau de variations de f. On sait donc que $f(x)$ admet un antécédent dans $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. De plus, f est strictement décroissante sur cet intervalle donc injective. On en déduit que cet antécédent est unique, on a montré qu'il existe un unique $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(x) = f(z)$.

   (b) On a
$$\cos(g(x)) = \frac{4 - 5\cos x}{5 - 4\cos(x)},$$
   et
$$\sin g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 g(x)},$$
   car $g([0,\pi]) \sin[0,\pi]$ et sin est positive sur $[0,\pi]$. On a donc
$$\sin(g(x)) = \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5\cos x}{5 - 4\cos(x)}\right)^2} = \frac{3\sin x}{5 - 4\cos(x)}$$
   en utilisant le calcul fait pour la dérivée de g.

   (c) On a
$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{\sin(g(x))}{\sqrt{5 - 4\cos(g(x))}} \\ &= \frac{3\sin x}{(5 - 4\cos x)\sqrt{5 - 4\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)}} \\ &= \frac{3\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}\sqrt{5(5 - 4\cos x) - 4(4 - 5\cos x)}} \\ &= \frac{3\sin x}{3\sqrt{5 - 4\cos x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a $f(g(x)) = f(x)$. Or $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ donc $g(x) \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ par décroissance de g. Par unicité de z, on a bien

$$z = g(x)$$

5. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

   (a) On a

$$\begin{aligned}
\cos(x+z) &= \cos(x)\cos z - \sin x \sin z \\
&= \cos(x)\cos(g(x)) - \sin x \sin g(x) \\
&= \frac{4\cos x - 5\cos^2 x - 3\sin^2 x}{5 - 4\cos x} \\
&= \frac{-2\cos^2 x + 4\cos x - 3}{5 - 4\cos x}
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
\cos(x-z) &= \cos x \cos(g(x)) + \sin x \sin g(x) \\
&= \frac{-8\cos^2 x + 4\cos x + 3}{5 - 4\cos x}
\end{aligned}$$

   (b) On pose :

$$\varphi_1 : \begin{array}{rcl} [0, \frac{\pi}{3}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t + g(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{array}{rcl} [0, \frac{\pi}{3}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t - g(t) \end{array}.$$

   Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, on a $\varphi_1'(t) = g'(t) + 1 = \dfrac{2(1 - 2\cos(t))}{5 - 4\cos t}$ donc

t	0	$\frac{\pi}{3}$
$\varphi_1'(t))$	$-$	
φ_1	π $\searrow$	$\frac{2\pi}{3}$

   La fonction φ_2 est croissante en tant que somme de fonctions croissantes. On a donc :

t	0	$\frac{\pi}{3}$
$\varphi_2'(t))$	$+$	
φ_2	-π $\nearrow$	0

   (c) On a

$$\cos\frac{x+z}{2} = \cos\frac{x+g(x)}{2} = \cos\left(\frac{1}{2}\varphi_1(x)\right) \geqslant 0$$

   car $\dfrac{1}{2}\varphi_1(x) \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel cos est positif.
   De même, on a

$$\cos\frac{x-z}{2} = \cos\frac{x-g(x)}{2} = \cos\left(\frac{1}{2}\varphi_2(x)\right) \geqslant 0$$

   car $\dfrac{1}{2}\varphi_2(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, intervalle sur lequel cos est positif.

(d) On sait que pour tout réel a, on a $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ donc $\cos^2 a = \dfrac{\cos 2a + 1}{2}$. On a vu à la question précédente que $\cos \dfrac{x+z}{2}$ est positif. On a donc

$$\begin{aligned}
\cos \frac{x+z}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos(x+z)}{2}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{-2\cos^2 x + 4\cos x - 3}{5 - 4\cos x}\right) + 1}{2} \\
&= \dots \\
&= \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sqrt{5 - 4\cos x}} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

De même, $\cos \dfrac{x-z}{2}$ est positif donc

$$\begin{aligned}
\cos \frac{x-z}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos(x-z)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1 + \dfrac{-8\cos^2 x + 4\cos x + 3}{5 - 4\cos x}}{2}} \\
&= \dots \\
&= 2f(x)
\end{aligned}$$

6. (a) On a vu que $f|_{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}$ est strictement croissante donc injective. On a $f\left(\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]\right) = \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ donc f induit une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ vers $J = \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. On notera h sa bijection réciproque.

(b) Soit $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$. On a vu que

— $\cos \dfrac{x+g(x)}{2} = f(x)$

— $\cos \dfrac{x-g(x)}{2} = 2f(x)$

Par ailleurs, $\dfrac{x+g(x)}{2} \in \left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right] \in [0,\pi]$ donc

$$\frac{x+g(x)}{2} = \arccos f(x).$$

On a vu que $\dfrac{x-g(x)}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ donc

$$\arccos\cos \frac{x-g(x)}{2} = \frac{g(x)-x}{2}.$$

On a donc

— $\dfrac{x+g(x)}{2} = \arccos f(x)$

— $\dfrac{g(x)-x}{2} = \arccos 2f(x)$

On a donc $x = \arccos f(x) - \arccos(2f(x))$. On en déduit que

$$h(x) = \arccos(x) - \arccos(2x).$$

Correction 2

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^\star$, alors

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= \frac{e^x}{1-e^x}+\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \\ &= \frac{e^x}{1-e^x}+\frac{1}{e^x-1} \\ &= \frac{e^x-1}{1-e^x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'égalité souhaitée.
Vous avez remarqué que je commence ma réponse par "Soit $x \in \ldots$ "

(b) Au vu de l'égalité montrée à la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f(x)+f(-x) \neq 0$ donc f n'est pas impaire (ou bien $f(0) \neq 0$). Par ailleurs, $f(x) = f(-x) \Leftrightarrow 2f(x) = -1$ ce qui est faux car f n'est pas constante donc la fonction n'est pas paire.

(c) On a, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)+e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{1-e^x}+\frac{e^{2x}}{(1-e^x)^2} = f(x)+f^2(x)$$

On a bien l'égalité souhaitée.

(d) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$ donc $f'(x) > 0$. On a

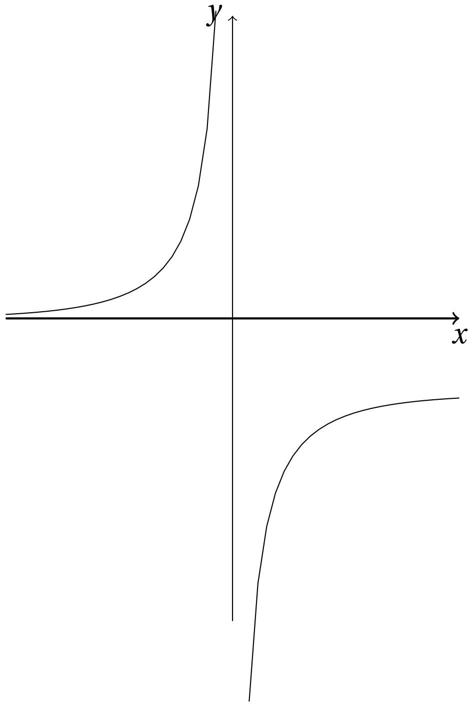
— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{-x}-1} = -1.$
— $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
— $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
— $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

(e) D'après le tableau de variations, on a $\mathrm{Im}(f) =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

(f) On a la figure suivante :



(g) Piège : f n'est pas strictement croissante! en effet, on a $f(-1) > f(1)$. Pour justifier de son injectivité, on peut dire que toute droite horizontale ne coupe le graphe qu'en un point maximum. Ou bien dire qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_-^\star$ ET $f(\mathbb{R}_+^\star) \cap f(\mathbb{R}_-^\star) = \emptyset$ donc elle est bien injective.

Elle n'est pas surjective car -1 n'appartient pas à l'image donc n'admet pas d'antécédent.

2. La fonction f est injective sur $I = \mathbb{R}_+^\star$ et $f(I) =]-\infty, -1[$ donc f induit une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $]-\infty, -1[$.
$]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle!!!

3. On va appliquer la formule donnant la dérivée de la réciproque. Comme la dérivée de f ne s'annule pas, g est dérivable et
$$\forall x \in]-\infty, -1[, g^{-1}(x) = \frac{1}{f' \circ g(x)}.$$
Or $f'(x) = f(x) + f^2(x)$ et $f \circ g(x) = x$, on obtient donc
$$\forall x < -1, g^{-1}(x) = \frac{1}{x + x^2},$$
et on retrouve bien la formule donnée dans l'énoncé.
BEAUCOUP m'ont dit que g était dérivable car f l'était ce qui est très faux. Pensez à cos qui est dérivable partout et arccos ne l'est pas aux bornes de son intervalle de définition.
Par ailleurs, j'ai vu beaucoup de f^{-1} donc vos copies ce qui n'a aucun sens étant donné que f n'est pas bijective (et c'est sans doute pourquoi on s'embête à donner des noms à ces réciproques!!).
Enfin, certains "redémontrent" la formule de la dérivée. Alors d'abord c'est une formule du cours que vous devez connaître par cœur donc il n'est pas nécessaire de la montrer et surtout, écrire $f^{-1} \circ f(x) = x$ puis dériver n'est pas une preuve!!!!!! en tout cas, c'est la preuve de la formule en admettant la dérivabilité de la fonction, c'est donc assez incomplet comme preuve. C'est très utile pour retrouver la formule si vous l'avez oublié mais je ne veux pas voir ça sur vos copies.

4. La fonction f est injective, corestreinte à son image, elle est bijective.

5. Soit $a \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$, on résout $f(x)=a$. On a

$$\begin{aligned} f(x)=a \quad &\Leftrightarrow \frac{e^x}{1-e^x}=a \\ &\Leftrightarrow e^x = a(1-e^x) \\ &\Leftrightarrow (1+a)e^x = a \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{a}{a+1} \text{ car } a \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{a}{a+1}\right) \text{ car } a(a+1)>0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$, $h(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.
Je vous rappelle que vous devez systématiquement justifier les étapes notamment quand vous divisez ou quand vous appliquez le ln.
Certains ont voulu scinder le ln en deux mais il faut alors penser aux valeurs absolues!

6. On a $h|_{]-\infty,-1[} = g$.

7. On dérive h, on obtient :

$$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[,\ h'(x) = \frac{\frac{(x+1)-x}{(1+x)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x(x+1)}$$

On retrouve bien la même expression de la dérivée.

Correction 3

Partie I - Un exemple

1. On pose la fonction $g_\alpha : \begin{pmatrix}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \end{pmatrix}$. Montrons qu'elle est positive.

g_α est bien définie, car $\forall x > -1$, $x+1>0$. D'autre part, comme composée et somme de fonctions dérivables, g_α est dérivable sur $]-1,+\infty[$, et $\forall x > -1$:

$$g'_\alpha(x) \;=\; \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha \;=\; \alpha\left((1+x)^{\alpha-1}-1\right).$$

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) \geqslant 0 &\iff (1+x)^{\alpha-1} \geqslant 1 \\ &\iff (\alpha-1)\ln(1+x) \geqslant 0 \qquad \text{(on a appliqué ln, strict. croissante)} \end{aligned}$$

Pour $\alpha > 1$, on divise par $\alpha - 1 > 0$, et on poursuit :

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) \geqslant 0 &\iff \ln(1+x) \geqslant 0 \\ &\iff 1+x \geqslant 1 \qquad \text{(on a appliqué exp, strict. croissante)} \\ &\iff x \geqslant 0 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variation suivant, pour $\alpha > 1$:

x	-1		0		$+\infty$
g_α	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g_\alpha(x)$	$+$				

$g_\alpha(0) = 1^\alpha - 1 = 0$

On a bien montré, pour $\alpha > 1$, que g_α était positive.

Pour $\alpha = 1$, on a $\forall x > -1$: $g_1(x) = 1 + x - 1 - x = 0$. Donc g_1 est également positive.

2. Fixons $x, y > 0$. Leur rôle dans cette inégalité est symétrique, donc quitte à les intervertir, on suppose que le plus grand d'entre eux est x. On écrit :

$$\begin{aligned}
(x+y)^\alpha = \left(x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right)^\alpha &= x^\alpha\left(1+\frac{y}{x}\right)^\alpha \\
&\geqslant x^\alpha\left(1+\alpha\cdot\frac{y}{x}\right) \qquad \text{(d'après la question précédente)} \\
&\geqslant x^\alpha + \alpha\cdot y\cdot x^{\alpha-1} \\
&\geqslant x^\alpha + 1\cdot y\cdot y^{\alpha-1} \qquad (\text{car } \alpha \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant y) \\
&\geqslant x^\alpha + y^\alpha.
\end{aligned}$$

Conclusion : par transitivité, on a bien $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.

3. L'inégalité $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$ est également vraie quand $x=0$ ou $y=0$, car il y a égalité. Elle est donc vraie pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, ce qui démontre que f_α vérifie la propriété (P_2).
D'autre part, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f_\alpha(xy) = x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha = f_\alpha(x) f_\alpha(y)$$

et cette égalité est également vérifiée quand $x=0$ ou $y=0$ puisqu'elle signifie alors que $0=0$. La fonction f_α vérifie donc aussi (P_1).
Finalement, f_α est solution.

Partie II - Quelques propriétés

1. Soit f une fonction constante à $C \in \mathbb{R}$. f est solution ssi la constante C vérifie :

$$\begin{cases} C = C^2 \\ C \geqslant C + C \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} C = 0 \text{ ou } C = 1 \\ C \leqslant 0 \end{cases}$$

La seule constante qui vérifie ce système de contraintes est $C=0$. La fonction nulle est donc l'unique solution constante.

2.
   - Montrons que $f(0)=0$. La propriété (P_1) pris en $x=y=0$ donne $f(0)=f(0)^2$, donc $f(0)$ vaut 0 ou 1. Montrons **par l'absurde** que $f(0)=1$ est impossible. Supposons que $f(0)=1$. Alors (P_1) pris en $x \in \mathbb{R}_+$ et $y=0$ donne $f(0)=f(x)f(0)$, c'est-à-dire $f(x)=1$. Cela montre que f est la fonction constante à 1, d'où **contradition**.
     Conclusion : par élimination, $f(0)=0$.
   - Montrons que $f(1)=1$. La propriété (P_1) pris en $x=y=1$ donne $f(1)=f(1)^2$, donc $f(1)$ vaut 0 ou 1. Montrons **par l'absurde** que $f(1)=0$ est impossible. Supposons que $f(1)=0$. Alors (P_1) pris en $x \in \mathbb{R}_+$ et $y=1$ donne $f(x)=f(x)f(1)=0$. Cela montre que f est la fonction constante à 0, d'où **contradition**, puisque f est supposée non constante.
     Conclusion : par élimination, $f(1)=1$.

3. Fixons $x \geqslant 0$ et raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{H}(n)$: "$f(x^n)=f(x)^n$".
— Initialisation. $\mathscr{H}(0)$ signifie que $f(1)=f(1)^0=1$, ce qui est vrai.
— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{H}(n)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f(x^{n+1}) &= f(x^n\cdot x) \\
&= f(x^n)\cdot f(x) \qquad (\text{d'après } (P_1)) \\
&= f(x)^n\cdot f(x) \qquad (\text{d'après } \mathscr{H}(n)) \\
&= f(x)^{n+1}
\end{aligned}$$

Cela démontre $\mathscr{H}(n+1)$.
— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}(n)$ est vraie.

4. Soit $x > 0$. On a d'une part

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) = 1$$

et d'autre part par (P_1) :

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, ce qui montre à la fois que $f(x) \neq 0$ (puisque sinon l'égalité serait impossible), et que $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.

5. Soit $x > 0$. On a $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$. Donc d'après (P_1) :

$$f(x) = f(\sqrt{x}) \cdot f(\sqrt{x}) = \left(f(\sqrt{x})\right)^2$$

Cela montre que $f(x) \geqslant 0$, et on sait déjà que $f(x) \neq 0$, donc finalement, $f(x) > 0$.

6. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Notons $t = y - x$, de sorte que $y = x + t$, et $t > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x+t) \\ &\geqslant f(x) + f(t) \qquad \text{(d'après } (P_2)\text{)} \\ &> f(x) \qquad \text{(car } f(t) > 0 \text{ d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

D'où $f(x) < f(y)$. On a bien montré que f est strictement croissante.

Partie III - Détermination des solutions

1. D'après la question 5 de la partie II, $f(2) > 0$, donc $\ln(f(2))$ est un nombre bien défini. De plus, d'après (P_2) :

$$f(2) = f(1+1) \geqslant f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$$

Donc $f(2) \geqslant 2$, et en appliquant ln (fonction croissante), on a $\ln(f(2)) \geqslant \ln(2)$.

2. Fixons $x > 0$. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 2^q \leqslant x < 2^{q+1} &\iff \ln(2^q) \leqslant \ln(x) < \ln(2^{q+1}) \\ &\iff q\ln(2) \leqslant \ln(x) < (q+1)\ln(2) \\ &\iff q \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < q+1 \qquad (\ln(2) > 0 \text{ car } 2 > 1) \end{aligned}$$

Un seul et unique entier $q \in \mathbb{Z}$ vérifie ce dernier encadrement, et il s'agit de $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right\rfloor$, la partie entière de $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Cet entier est donc l'unique entier q qui vérifie $2^q \leqslant x < 2^{q+1}$.

Remarque du professeur : on aurait aussi pu argumenter en remarquant que les 2^q sont des nombres strictement croissants, qui tendent vers 0^+ lorsque $q \to -\infty$ et vers $+\infty$ lorsque $q \to +\infty$. Les intervalles $[2^q, 2^{q+1}[$, où $q \in \mathbb{Z}$, forment donc une partition de $\mathbb{R}_+^*$.

3. (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 2^{q_p} \leqslant x^p < 2^{q_p+1} \quad &\text{donc} \quad q_p \ln(2) \leqslant p\ln(x) < (q_p+1)\ln(2) \\ &\text{donc} \quad \frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < \frac{q_p+1}{p} \end{aligned}$$

La partie gauche de l'encadrement est $\frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et la partie droite donne $\frac{q_p}{p} \geqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p}$. D'où :

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p} < \frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Par le théorème des gendarmes, $\dfrac{q_p}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a par définition : $2^{q_p} \leqslant x^p < 2^{q_p+1}$. On applique la fonction f (qui est croissante, d'après la question 6 de la partie II) pour obtenir :

$$f\left(2^{q_p}\right) \leqslant f\left(x^p\right) < f\left(2^{q_p+1}\right) \qquad (*)$$

D'après la question 3 de la partie II, on a $f(t^n) = f(t)^n$ pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. C'est en fait aussi vrai pour $n < 0$. En effet, si $n = -k$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la question 4 de la partie II :

$$f(t^n) = f\left(\frac{1}{t^k}\right) = \frac{1}{f(t^k)} = \frac{1}{(f(t))^k} = f(t)^{-k} = f(t)^n$$

Donc l'encadrement $(*)$ devient : $f(2)^{q_p} \leqslant f(x)^p < f(2)^{q_p+1}$.
De là, on a, en appliquant ln :

$$q_p \ln(f(2)) \leqslant p \ln(f(x)) < (q_p+1)\ln(f(2)) \quad \text{et donc} \quad \frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} < \frac{q_p+1}{p}$$

(c) Par passage à la limite $p \to +\infty$ (qui élargit les inégalités), en sachant que $\frac{q_p}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et $\frac{1}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \leqslant \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

On a donc :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \quad \text{donc} \quad \ln(f(x)) = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}\ln(x)$$
$$\text{donc} \quad f(x) = \exp\left(\frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}\ln(x)\right) \qquad (**)$$

On pose alors

$$\boxed{\alpha := \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}}$$

qui est bien supérieur à 1 (d'après la question 1 de cette partie), et l'égalité $(**)$ signifie précisément :

$$f(x) = e^{\alpha\ln(x)} = x^\alpha$$

4. On peut remarquer que l'égalité $f(x) = x^\alpha$ est aussi vraie pour $x = 0$, puisque $f(0) = 0$. On a donc $f = f_\alpha$.

Conclusion : les parties II et III ont montré que toute fonction solution était soit la fonction nulle, soit une fonction f_α, pour un $\alpha \geqslant 1$ (étape d'analyse). Réciproquement, la fonction est bien solution, et d'après la partie I, les f_α aussi (étape de synthèse).
Les fonctions solutions du problème sont donc précisément la fonction nulle et les fonctions f_α, pour $\alpha \geqslant 1$.