

TD 7 : Primitives et ED.

1 calcul de primitives "usuelles" et changement de variable

Exercice 1.
Calculer $\int^t \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x \, dx$.

Exercice 2.
Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 3.
Calculer $\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} \, dt$.

Exercice 4.
Calculer $\int^x \cos t \sin t \, dt$.

Exercice 5.
Calculer $\int^x \sin^2(t) \, dt$.

Exercice 6.
Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \, dt$.

Exercice 7.
Calculer $\int^x \frac{dt}{e^t + 1}$.

Exercice 8.
Calculer $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) \, dt$.

2 Calcul de primitives par intégration par parties

Exercice 9.
Calculer $\int^x (t+1) \operatorname{ch} t \, dt$.

Exercice 10.
Calculer $\int^t (\arcsin x)^2 \, dx$

3 Récurrence et intégration par parties

Exercice 11.

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n \, dx$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n e^t \, dt$.
2. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
3. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
4. En déduire la limite de $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$

4 Primitive de fractions rationnelles

Exercice 12.
Calculer $\int^t \frac{dx}{1-x^2}$.

Exercice 13.
Calculer $\int^x \frac{t+1}{t(t-1)} \, dt$.

Exercice 14.
Calculer $\int^x \frac{dt}{t^2+t}$.

Exercice 15.
Calculer $\int^t \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

5 Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 16. 
Résoudre $y' + \frac{(e^x+1)}{(e^x-1)} y = \frac{e^x+2}{e^x-1}$.

Exercice 17.

Résoudre $y' - xy = xe^{x^2}$

Exercice 18.
Résoudre $y' - y \frac{1}{\tan x} = \sin(x)$

Exercice 19.
Résoudre $(x^2+1)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$.

Exercice 20.
Résoudre $y' + \tan(x)y + \cos^2(x) = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 21.
Soit $(x^2+1)y' - 3xy = 1$

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions.

6 Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 22. 

Trouver les solutions des équations différentielles suivantes

$$y'' - 3y' + 2y = g_i(x), \quad i = 1 \dots 4 \text{ avec}$$

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $g_1(x) = 1$ | 3. $g_3(x) = (x+1)e^{2x}$ |
| 2. $g_2(x) = (x-1)e^{-x}$ | 4. $g_4(x) = \sin(x)$ |

Exercice 23.
Résoudre $y'' + ay = 0$.

Exercice 24.
Résoudre $y'' + y' - 2y = 2 \sin x$.

7 Équations différentielles avec changement de variable

Exercice 25.

Résoudre $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en effectuant le changement de variable $t = \arctan x$ (c'est-à-dire en posant $z(t) = y(\tan(t))$). On donnera les solutions sous forme de fractions rationnelles.

Exercice 26.

On cherche à résoudre $x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène en effectuant le changement de variable $t = \ln x$ (c'est-à-dire en posant $z(t) = y(e^t)$).
2. En déduire l'ensemble des solutions.

Exercice 27.

Soit (E) l'équation différentielle $ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$ avec a, b, c réels.

1. En posant $z(t) = y(e^t)$, montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
2. En déduire la forme des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.
3. Résoudre ensuite l'équation $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

8 Équations fonctionnelles

Exercice 28.

Déterminer toutes les fonctions dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)f'(x) = 1$.

Exercice 29.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \quad y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparément les cas $m = 0$ et $m \neq 0$).

Exercice 30.

1. Résoudre $x^2 y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le changement de variable $z(t) = y(e^t)$.
2. Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant : $f'(x) = f(\frac{1}{x}), \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$.

9 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 31.

Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

Exercice 32.

Calculer $\int_1^2 \frac{dt}{t^2}$.

Exercice 33.

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt$.

Exercice 34.

Calculer $\int_t^x \sin^3 x \cos x \, dx$.

Exercice 35.

Calculer $\int_t^x \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^5 x}$.

Exercice 36.

Calculer $\int_t^x \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

Exercice 37.

Calculer $\int_0^{2\pi} \cos^2(t) \, dt$.

Exercice 38.

Calculer $\int_0^1 \frac{2t}{t+2} \, dt$.

Exercice 39.

Calculer $\int_x^x \frac{t}{1+2t} \, dt$.

Exercice 40.

Calculer $\int_t^x \frac{1+e^x \, dx}{1-e^x}$.

Exercice 41.

Calculer $\int_x^x t \arctan t \, dt$.

Exercice 42.

$\int_0^1 \arctan t \, dt$.

Exercice 53.

Résoudre $y' - \tan x y = \frac{1}{\cos x}$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, avec $y(0) = 1$.

Exercice 54.

Trouver les solutions de $y'' + y' + y = g(x)$ dans le cas où :

1. $g(x) = 1$

2. $g(x) = xe^{-2x}$

Exercice 43.

Calculer $\int \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} \, dx$.

Exercice 44.

Calculer $\int_x^x \frac{dt}{t^2 - 2t - 3}$.

Exercice 45.

Calculer $\int_x^x \frac{dt}{t^2 - 4t + 4}$.

Exercice 46.

Calculer $\int_t^x \frac{dx}{x^2 + 3}$.

Exercice 47.

Résoudre $x'(t) - x(t) = t^2$.

Exercice 48.

Résoudre $(x^2 + 1)y' + 3xy = 0$.

Exercice 49.

Résoudre $y' + \frac{(x+1)}{x(x-1)}y = \frac{x}{(x-1)}$.

Exercice 50.

Résoudre $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Exercice 51.

Résoudre $y' = \frac{1}{x(1+x^2)}y$.

Exercice 52.

Résoudre $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}$.

Exercice 55.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2y' + 5y = 5x$.

3. $g(x) = x^2 + 3x + 4$

4. $g(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Exercice 56.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $-3y'' - 2y' + y = \cos(x)$.

Exercice 57.

Résoudre $y'' + 2y' - 3y = x^2$.

Exercice 58.

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = \sin x + \cos x$.

Exercice 59.

Résoudre $y'' + y' = 2xe^x$.

Exercice 60.

1. Résoudre l'équation $x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(t) = y(e^t)$.
2. Trouver une solution polynomiale de $x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) = 3x^2 + 4x + 1$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de $x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) = 3x^2 + 4x + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 61.**

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x) dx$$

1. Établir une relation de récurrence.
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Exercice 62.

On considère deux entiers naturels p et q et on pose $I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I(p, q)$ et $I(p+1, q-1)$ lorsque $q \geq 1$.
2. En déduire une expression de $I(p, q)$ en fonction de $p!$, $q!$ et $(p+q+1)!$.
3. Donner une expression factorisée de

$$\sum_{k=0}^q \frac{(-1)^k}{p+k+1} \binom{q}{k}$$

Exercice 63.

Résoudre l'équation $y' + \frac{2}{x(x^2-1)} y = \frac{x}{x^2-1}$.

Exercice 64.

Résoudre l'équation différentielle $x^2 y'' + 3x y' + 4y = 7x \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(t) = y(e^t)$.

Exercice 65.

Résoudre $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en cherchant une solution particulière y_p sous la forme $x \mapsto ax$ et en posant le changement de fonction $y = y_p - \frac{1}{z}$.

Exercice 66.

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = \sqrt{y}$. Soit y une solution différente de la fonction nulle.

1. Montrer que y ne peut être strictement positive.
2. Montrer que si $y(a) = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \leq a, y(x) = 0$.
3. En déduire que l'ensemble des points d'annulation de y est majoré.
4. En déduire la forme de y .

Exercice 67.

Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x et y réels on ait

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Memo

- Comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ?
Résoudre l'équation homogène puis trouver une solution particulière.
- Comment chercher une solution particulière ?
— Essayer des solutions "évidentes" (constante, identité...)
— Chercher une solution particulière sous la même forme que le second membre (cf méthode 1)
— Utiliser la méthode de la variation de la constante : n'oubliez pas de multiplier $\lambda(x)$ par la solution homogène une fois que vous avez déterminé $\lambda(x)$!!
- Comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 ?
Appliquer le cours : si, si, tout est dedans;-)
- Comment résoudre une équation quelconque ?
— Chercher les solutions polynomiales : cela sera alors précisé dans l'énoncé.
— Changer de fonction. Le changement de variable sera donné.
- Comment trouver des fonctions satisfaisant une équation fonctionnelle ?
Se ramener à une équation différentielle, la résoudre et ne pas oublier de vérifier, parmi les solutions de l'équation différentielle, celles qui sont effectivement solution de l'équation fonctionnelle.