# Correction du DM n 2

***Exercice 1*** 1. On a $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $f$ est non injective.

On peut aussi prendre $(z, z') \in (\mathbb{C}^\star)^2$ tel que $f(z) = f(z')$.

On a alors

$$\begin{aligned} f(z) = f(z') \quad & \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = z' + \frac{1}{z'} \\ & \Leftrightarrow (z - z') = \frac{1}{z'} - \frac{1}{z} \\ & \Leftrightarrow (z - z') = \frac{z - z'}{zz'} \\ & \Leftrightarrow z = z' \text{ ou } 1 = \frac{1}{zz'} \end{aligned}$$

On en déduit que $f$ n'est pas injective.

2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$, alors $f(z) = \omega \Leftrightarrow z^2 - \omega z + 1 = 0$. On a un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = \omega^2 - 4$ donc pour $\omega = \pm 2$, on a une unique racine. Pour $\omega \neq \pm 2$, on a exactement deux racines. Le produit des racines de ce polynôme (éventuellement confondues) est 1 donc les racines sont toujours non nulles. On en déduit que pour $\omega = \pm 2$, l'équation $f(z) = w$ a une unique solution dans $\mathbb{C}^\star$ et pour $\omega \neq \pm 2$, l'équation a exactement deux solutions dans $\mathbb{C}^\star$.

   On vient de montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega$ admet au moins un antécédent par $f$ dans $\mathbb{C}^\star$ donc $f$ est surjective.

3. Soit $z \in \mathbb{U}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On a alors $f(z) = 2\cos\theta$ et $\cos\theta \in [-1, 1]$ donc $f(z) \in [-2, 2]$.

   On a donc l'inclusion $f(\mathbb{U}) \subset [-2, 2]$. Montrons l'inclusion réciproque: soit $x \in [-2, 2]$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $2\cos\theta = x$ car $\mathrm{Im}(2\cos) = [-2, 2]$. On a donc $x = f(e^{i\theta})$ et $x \in f(\mathbb{U})$ ce qui montre l'inclusion $[-2, 2] \subset f(\mathbb{U})$ d'où l'égalité.

   On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} f(\mathbb{U}) \quad & = \{f(z), z \in \mathbb{U}\} \\ & = \{f(e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} \\ & = \{2\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \\ & = [-2, 2] \text{ car } \mathrm{Im}(\cos) = [-1, 1] \end{aligned}$$

   Attention: écrire $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos\theta \in [-1, 1]$ ne donne qu'une inclusion.

4. Soit $z \in f^{-1}([-2, 2])$. Alors, il existe $x \in [-2, 2]$ tel que $f(z) = x$.

   On a donc $z^2 - 2xz + 1 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = x^2 - 4$ qui est négatif ou nul.

   - Si $x = \pm 2$, alors $z = \pm 1$ et $z \in \mathbb{U}$.
   - Si $x \in ]-2, 2[$, alors $z = \frac{x \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Or, on sait que les deux antécédents de $x$ sont inverses l'un de l'autre. Comme ils sont également conjugués, on en déduit que ces deux antécédents sont de module 1.

Dans les deux cas, on a montré qu'un antécédent d'un élément de $[-2,2]$ est toujours de module 1 donc

$$f^{-1}([-2,2]) \subset \mathbb{U}.$$

Pour l'inclusion réciproque, on a déjà montré que pour tout $z \in \mathbb{U}, f(z) \in [-2,2]$ donc $z \in f^{-1}([-2,2])$ ce qui montre l'égalité :

$$f^{-1}([-2,2]) = \mathbb{U}.$$

Certains ont montré cette inclusion réciproque en utilisant l'égalité de la question précédente à savoir : $f(\mathbb{U}) = [-2,2]$ donc $f^{-1}(f(\mathbb{U})) = f^{-1}([-2,2])$ , ce qui est vrai (car si deux ensembles sont égaux, leurs images réciproques le sont aussi). Attention à ceux qui me disent " on compose par $f^{-1}$, on a le sentiment (désagréable) que vous "appliquez" la fonction $f^{-1}$ qui n'est pas définie.

Ceux qui ont fait ça m'ont écrit directement $\mathbb{U} = f^{-1}([-2,2])$ ce qui donne l'impression (désagréable) que vous avez remplacé $\mathbb{U}$ par $f^{-1}(f(\mathbb{U}))$ (ce qui est faux puisqu'on travaille ici avec des images réciproque/directe d'ensembles et pas avec des composées de fonctions. Il faut donc dire $\mathbb{U} \subset f^{-1}(f(\mathbb{U}))$ pour conclure.

Il était aussi possible d'anticiper sur la question d'après en déterminant $f^{-1}(\mathbb{R})$ puis en ne gardant que les éléments qui s'envoient sur $[-2,2]$.

mes parenthèses ont sauté en tapant le sujet mais vous avez le droit de le corriger en utilisant la notation correcte définie en cours.

5. Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. On va raisonner par équivalence pour obtenir directement l'égalité (on ne suppose donc PAS que $z$ appartient à $f^{-1}(\mathbb{R})$). On a

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} \quad & \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \\ & \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} \\ & \Leftrightarrow z + \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z} + \frac{z}{|z|^2} \\ & \Leftrightarrow z - \overline{z} = \frac{z - \overline{z}}{|z|^2} \\ & \Leftrightarrow z = \overline{z} \text{ ou } \frac{1}{|z|^2} = 1 \\ & \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{U} \end{aligned}$$

On a donc $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\star \cup \mathbb{U}$.

On peut aussi raisonner avec la forme algébrique: Soit $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$f(z) = x + iy + \frac{1}{x+iy} = \frac{(x+iy)(x^2+y^2) + x - iy}{|x+iy|^2} = \frac{x(x^2+y^2+1) + iy(x^2+y^2-1)}{|x+iy|^2}.$$

On en déduit que

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(f(z)) = 0 \Leftrightarrow y(x^2+y^2-1) = 0.$$

On retrouve bien le résultat.

On peut également poser $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$\mathcal{I}m(f(z)) = \sin\theta \left(1 - \frac{1}{r^2}\right),$$

d'où $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\theta = 0$ ou $r = 1$.

6. Soit $g$ définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=f(x)$. D'après ce qui précède, $g$ est bien une fonction réelle de la variable réelle, on peut donc déterminer ses variations. La fonction $g$ est dérivable et pour tout $x\geqslant 1$, $g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$. La fonction $g$ est strictement croissante donc injective. On a $g(1)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $g$ est continue donc $\mathrm{Im}(g)=[2,+\infty[$. On en déduit que $f$ induit une bijection de $I$ vers $[2,+\infty[$ (ou encore que $g|^{[2,+\infty[}$ est bijective).

   évitez de dérivée selon $z$ la fonction $g$ (choisissez plutôt un nom de variable réelle !).

7. Soit $a\in[2,+\infty[$. On cherche l'unique antécédent de $a$ par $g$ dans l'intervalle $[1,+\infty[$. Soit $x\in[1,+\infty[$, $g(x)=a\Leftrightarrow x^2-ax+1=0$. Le discriminant étant positif, on a deux racines réelles (éventuellement confondues): $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$. Or $a\geqslant 2$ donc $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\geqslant\dfrac{a}{2}\geqslant 1$ et par injectivité de $g$, l'unique antécédent de $a$ par $g$ est $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

   On en déduit que
$$g:\left\{\begin{array}{ccc}[2,+\infty] & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\end{array}\right. .$$

***Exercice 2*** 1. On pose $z=a+ib$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a $z=1-\overline{z}+2i\Leftrightarrow a+ib=1-a+ib+2i\Leftrightarrow a=1-a+2i$, ce qui est impossible car $a\in\mathbb{R}$.

2. Soit $(u+iv)\in\mathbb{C}$, alors $u+iv\in\mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow\exists z\in\mathbb{C}, z+|z|=u+iv$.

   On pose $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et on cherche à savoir quand le système
$$\begin{cases}x+\sqrt{x^2+y^2}=u\\ y=v\end{cases}$$
   admet au moins une solution.

   On remarque tout d'abord qu'il est équivalent à
$$\begin{cases}x+\sqrt{x^2+v^2}=u\\ y=v\end{cases},$$
   On raisonne par analyse-synthèse

   <u>Analyse</u> :

   Si $u+iv\in\mathrm{Im}(f)$, alors le système admet une solution $(x,y)$.
   On a alors $u=x+\sqrt{x^2+v^2}\geqslant x+\sqrt{x^2}\geqslant 0$. Par ailleurs,
$$\begin{aligned}x+\sqrt{x^2+v^2}=u\ &\Leftrightarrow u-x=\sqrt{x^2+v^2}\\ &\Rightarrow u^2-2ux+x^2=x^2+v^2\\ &\Leftrightarrow 2ux=u^2-v^2\end{aligned}$$
   et on remarque que $u-x=\sqrt{x^2+v^2}$ implique $u\geqslant x$.

   Si $u=0$, on a alors $v=0$.

   Si $u\neq 0$, on a une unique solution $x=\dfrac{u^2-v^2}{2u}$.

   <u>Synthèse</u> :Soit $u+iv\in\mathrm{Im}(f)$ tel que $u=v=0$ ou $u>0$.

Si $u+iv=0$, alors $f(0)=0$ donc 0 appartient bien à l'image.
Si $u>0$, on pose $y=v$ et $x=\dfrac{u^2-v^2}{2u}$. On constate que $x \geqslant \dfrac{u^2}{2u} \geqslant u$, on a donc :

$$\begin{aligned} x=\frac{u^2-v^2}{2u} \quad & \Leftrightarrow 2ux = u^2-v^2 \\ & \Leftrightarrow u^2-2ux+x^2 = x^2+v^2 \\ & \Leftrightarrow u-x=\sqrt{x^2+v^2} \text{ car les deux membres sont positifs} \\ & \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+v^2}=u \end{aligned}$$

en reprenant, à l'envers, les calculs faits dans la phase d'analyse. On en déduit que $x+iy$ ainsi défini est bien un antécédent de $u+iv$ par $f$ ce qui montre que $u+iv$ est bien un élément de l'image.

Par double inclusion, on a montré :

$$\mathrm{Im}(f)=\{z\in\mathbb{C}, \mathcal{R}e(z)>0\}\cup\{0\}.$$

A posteriori, elle n'était pas si simple cette question car vous avez majoritairement trouvé une inclusion sans prouver l'inclusion réciproque.

***Exercice 3***

1. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k-2^{n+1}}{1-2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^{n+1}-2^k \\ &= (n+1)2^{n+1} - \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= (n+1)2^{n+1}+1-2^{n+1} \\ &= n2^{n+1}+1 \end{aligned}$$

On a bien le résultat souhaité.

2. On permute les deux signes somme :

$$S_n=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} 2^j = \sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j,$$

on a bien le résultat souhaité.

3. On a $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^j$ donc, en utilisant la question précédente, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = S_{n-1} = (n-1)2^n+1,$$

en utilisant la première question.

Mais pourquoi n'utilisez-vous pas $S_{n-1}$?????

4. On a

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{i+1} \text{ d'après la question précédente} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i2^{i+1} + 1) \\
&= n + \sum_{i=1}^{n} i2^{i+1} \\
&= n + 4\sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} \\
&= n + 4(n-1)2^n + 4 \\
&= n + 4 + (n-1)2^{n+2}
\end{aligned}$$

Là encore beaucoup de calculs inutiles: utilisez ce que vous avez fait avant