

Primitives et ED

1 Primitives

1.1 Notation intégrale

On sait que toute fonction continue f admet une primitive et que $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a .

Parfois, on veut juste travailler avec UNE primitive et ne pas s'encombrer d'une constante. La notation $x \mapsto \int^x f(t) dt$ (sans borne en bas) désigne une primitive de f (de variable x).

Exemples 1.

$$1. \int \cos(t) dt = \sin(x)$$

$$2. \int^x (1+t) dt = \frac{1}{2}(1+x)^2$$

Cette notation a un gros inconvénient: elle peut désigner deux fonctions qui ne sont égales qu'à constante près. Par exemple, on a aussi $\int^x (1+t) dt = x + \frac{1}{2}x^2$.

1.2 Calcul de primitives

On a vu qu'il y a différents moyens de calculer une intégrale: IPP, changement de variable. On va, bien sûr, utiliser ces méthodes pour les calculs de primitives. On procèdera comme pour une intégrale mais en modifiant seulement la borne supérieure.

Exemples 2.

$$1. \text{ Calcul de } \int^x te^t dt.$$

On pose $u(t) = t, v'(t) = e^t$, on a $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$ donc

$$\int^x te^t dt = [te^t]^x - \int^x e^t dt = (x-1)e^x.$$

$$2. \text{ Calcul de } \int^x \frac{1}{1+e^t} dt.$$

On pose $y = e^t$, on a $dy = e^t dt$ puis $dt = \frac{dy}{y}$, on a donc

$$\int^x \frac{1}{1+e^t} dt = \int^{e^x} \frac{1}{(1+y)y} dy = \int^{e^x} \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} dy,$$

d'où

$$\int^x \frac{1}{1+e^t} dt = \ln(e^x) - \ln(e^x + 1) = x - \ln(e^x + 1).$$

On peut aussi faire plus rapide :

$$\int^x \frac{1}{1+e^t} dt = \int^x \frac{1+e^t - e^t}{1+e^t} dt = \int^x 1 - \frac{e^t}{1+e^t} dt = x - \ln(1+e^x)$$

1.3 primitive de fractions rationnelles

On peut déterminer une primitive de l'inverse d'un polynôme de degré 2 c'est-à-dire de la forme $\int^x \frac{dt}{t^2 + bt + c}$:

Proposition 1.

On note Δ le discriminant de $X^2 + bX + c$. Alors

- Si $\Delta > 0$, il existe deux réels distincts r_1, r_2 tels que $X^2 + bX + c = (X - r_1)(X - r_2)$.
On a alors $\frac{1}{X^2 + bX + c} = \frac{\alpha}{X - r_1} + \frac{\beta}{X - r_2}$ et $\int^x \frac{dt}{t^2 + bt + c} = \alpha \ln|x - r_1| + \beta \ln|x - r_2|$.
- Si $\Delta = 0$, il existe un réel r tel que $X^2 + bX + c = (X - r)^2$. On a alors $\int^x \frac{dt}{t^2 + bt + c} = -\frac{1}{x - r}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $X^2 + bX + c = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{4c - b^2}{4}\right)}_{>0}$ et après changement de variable, on se ramène à intégrer $\frac{\lambda}{y^2 + 1}$ en $\lambda \arctan(y)$.

Exemples 3.

1. $\int^x \frac{dt}{t^2 - 5t + 4} ?$

2. $\int^x \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} ?$

3. $\int^x \frac{dt}{t^2 + 2t + 3} ?$

2 Équations différentielles d'ordre 1

2.1 Définition et structure de l'ensemble des solutions

Définition 1. Soit $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues. On considère l'EDL d'ordre 1 (E) et l'équation homogène associée (E_H) :

$$y' + a(t)y = f \quad (E)$$

$$y' + a(t)y = 0 \quad (E_H)$$

Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **solution** de (E) si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Remarque. L'ensemble des solutions est donc un ensemble de fonctions !!

Théorème 2 (Principe de superposition). *Si une fonction y_1 est une solution de l'équation $y' + a(t)y = f_1$ et y_2 est solution de $y' + a(t)y = f_2$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues, alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ est solution de l'équation $y' + a(t)y = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.*

Conséquence : Si y_P est une solution particulière de (E) , alors pour toute autre solution y de (E) , la fonction $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f - f = 0$, c'est-à-dire solution de (E_H) . On a donc

$$y = y_H + y_P$$

2.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 3.

Notons $A : I \rightarrow \mathbb{K}$ une primitive de a . Les solutions de (E_H) sont les fonctions de la forme :

$$y_H : t \mapsto C e^{-A(t)} \quad \text{où } C \text{ est une constante de } \mathbb{K}$$

Preuve: analyse: Soit y une solution de (E_H) . On procède par disjonction de cas:

On commence par remarquer que $y = 0$ est solution.

On suppose ensuite que y est une fonction qui ne s'annule pas alors

$$y \text{ solution de } E_H \Rightarrow \frac{y'}{y} = -a \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \ln |y| = -A + C \Rightarrow |y| = e^{-A} e^C.$$

On sait que y ne s'annule pas et elle est continue, elle est donc de signe constant. Si y est positive, on pose $\lambda = e^C$. Sinon, on pose $y = -e^C$.

On a donc

$$y \text{ solution de } E_H \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y = \lambda e^{-A}.$$

Il reste maintenant à traiter le cas d'une fonction quelconque. Soit donc y quelconque, on va montrer que $y e^A$ est constante, ce qui prouvera que y est de la forme $C e^{-A}$.

On pose $f = y e^A$, on a $f' = y' e^A + a y e^A = -a y e^A + a y e^A = 0$. La dérivée de f est nulle, f est bien constante.

Synthèse Soit $f = C e^{-A}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Montrons que f est solution de E_H . On a $f' = -a C e^{-A}$ donc $f' + a f = 0$ et f est bien solution.

Exemples 4.

1. $y' + y = 0$. Les solutions sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $y' + t y = 0$. Les solutions les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$.

3. Résoudre $y' + \frac{1}{t} y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ puis $\mathbb{R}^*$. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R}$

Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{\mu}{t}, \mu \in \mathbb{R}$.

En fait $x \mapsto \frac{C}{|x|}$ mais comme signe constant, on rentre le signe dans la constante. Si f est une solution sur $\mathbb{R}^*$, alors $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, idem pour $\mathbb{R}_-^*$.

2.3 Recherche d'une solution particulière

Méthode 1.

On se place dans le cas $y' + ay = f(t)$, où $a \in \mathbb{K}^*$ est constant.

- si f est constante, chercher y_P constante.
- si f est polynomiale, chercher y_P polynomiale, de même degré.
- si $f : t \mapsto e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :
 - si $\alpha \neq -a$ chercher y_P de la forme $\lambda e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$;
 - si $\alpha = -a$ chercher y_P de la forme $\lambda t e^{\alpha t}$;
- si a est réel et $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$, chercher y_P de la forme $\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exemples 5.

1. Trouver une solution particulière de $y' + y = e^{2x}$. On a $a = 1$ et $2 \neq -1$, on cherche donc une solution sous la forme $y_p(x) = \lambda e^{2x}$. On a $y'_p(x) = 2\lambda e^{2x}$ puis $3\lambda e^{2x} = e^{2x}$ ce qui impose $\lambda = \frac{1}{3}$. On a donc $y_p : x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x}$.
2. Trouver une solution particulière de $y' + y = e^{-x}$. On a $a = 1$, on cherche donc une solution sous la forme $y_p(x) = \lambda x e^{-x}$. On a $y'_p(x) = -\lambda x e^{-x} + \lambda e^{-x}$ donc $\lambda e^{-x} = e^{-x}$ puis $\lambda = 1$. Une solution particulière est donc $y_p(x) = x e^{-x}$.
3. Trouver une solution particulière de $y' + y = 2e^{-x} + 3e^x$. On va chercher une solution particulière y_{p1} de $y' + y = 2e^{-x}$ puis une solution y_{p2} de $y' + y = 3e^x$. On cherche y_{p1} sous la forme $y_{p1}(x) = \lambda x e^{-x}$, on a $\lambda = 2$ donc $y_{p1}(x) = 2x e^{-x}$.
On cherche y_{p2} sous la forme $y_{p2}(x) = \mu e^x$, on a $y'_{p2} + y_{p2} = 2\mu e^x$ donc $\mu = \frac{3}{2}$ et $y_{p2}(x) = \frac{3}{2}e^x$.
On en déduit qu'une solution particulière est $y_p(x) = 2x e^{-x} + \frac{3}{2}e^x$.
4. Trouver une solution particulière de $y' - y = \cos(x)$. On cherche y_p sous la forme $y_p(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$. On a $y'_p(x) = -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$ donc

$$y'_p(x) - y_p(x) = (\mu - \lambda) \cos(x) - (\lambda + \mu) \sin(x)$$

On en déduit (nous verrons plus tard pourquoi!) que $\mu - \lambda = 1$ et $\lambda + \mu = 0$ donc $\mu = \frac{1}{2} = -\lambda$.

On a donc $y_p(x) = -\frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x)$.

Théorème 4 (variation de la constante). Si A est une primitive de a sur I , alors une solution particulière de (E) est la fonction :

$$y_P : t \mapsto C(t) e^{-A(t)} \quad \text{où la fonction } C \text{ est une primitive de } f.e^A$$

Remarque. $e^{-A(t)}$ est solution de (E_H) , son expression a donc déjà été simplifiée en déterminant les solutions de l'équation homogène.

Exemples 6.

1. Trouver une solution particulière de $y' + y = \cos(x)e^x$. On sait que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-x}$, on cherche donc y_p sous la forme $y_p(x) = C(x)e^{-x}$. On a $C'(x)e^{-x} = \cos(x)e^x$ donc $C'(x) = \cos(x)e^{2x}$.

Reste à trouver une primitive de $x \mapsto \cos(x)e^{2x}$. 1ère méthode: deux IPP:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int^x \cos(t)e^{2t} dt \\ &= [\sin(t)e^{2t}]_x - \int^x 2e^t \sin(t) dt \\ &= \sin(x)e^{2x} + [2\cos(t)e^{2t}]^x - 4 \int^x \cos(t)e^{2t} dt. \end{aligned}$$

On en déduit que $5 \int^x \cos(t)e^{2t} dt = (\sin(x) + 2\cos(x))e^{2x}$ donc

$$C(x) = \frac{(\sin(x) + 2\cos(x))e^{2x}}{5},$$

puis

$$y_p(x) = \frac{(\sin(x) + 2\cos(x))e^x}{5}$$

2ème méthode: On écrit

$$C(x) = \int^x \operatorname{Re} (e^{(2+i)t}) dt = \operatorname{Re} \left(\int^x e^{(2+i)t} dt \right),$$

on a

$$\begin{aligned} \int^x e^{(2+i)t} dt &= \left[\frac{e^{(2+i)t}}{2+i} \right]^x \\ &= \frac{e^{(2+i)x}}{2+i} = \frac{(2-i)e^{2x}e^{ix}}{5} \end{aligned}$$

donc

$$C(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{(2-i)e^{2x}e^{ix}}{5} \right) = \frac{(2\cos(x) + \sin(x))e^{2x}}{5}$$

On retrouve bien la même valeur.

2. Trouver une solution particulière de $y' + \frac{1}{x}y = 3x$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{C(x)}{x}$. On a $\frac{C'(x)}{x} = 3x$ donc $C'(x) = 3x^2$ et $C(x) = x^3$. Une solution particulière est $y_p(x) = x^2$.

3. Trouver une solution particulière de $y' + \frac{1}{t}y = \ln(t)$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \frac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \frac{C(t)}{t}$. On a $C'(t) = t \ln(t)$ donc $C(x) = \int^x t \ln(t) dt$. On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = t$ donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = \frac{t^2}{2}$, on obtient

$$C(x) = \left[\frac{t^2 \ln(t)}{2} \right]^x - \int^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

On a donc $y(x) = \frac{2x \ln(x) - x}{4}$.

2.4 Résolution de l'équation complète

Théorème 5.

Les fonctions $I \rightarrow \mathbb{K}$ solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme

$$y = y_H + y_P$$

où y_H est une solution de l'équation homogène (E_H) et y_P est une solution particulière de (E) .

Exemple 7. Résoudre les équations du paragraphe précédent.

Les solutions de $y' + y = \cos(x)e^x$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x} + \frac{(\sin(x) + 2\cos(x))e^x}{5}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $y' + \frac{1}{x}y = 3x$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x} + x^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $y' + \frac{1}{t}y = \ln(t)$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{2t \ln(t) - t}{4}, \lambda \in \mathbb{R}$.

On peut aussi passer aux complexes pour résoudre une équation réelle.

Exemple 8. Résoudre $y' - y = \cos(x)$ en résolvant l'équation $y' - y = e^{ix}$.

Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche maintenant une solution particulière. On va commencer par chercher une solution particulière complexe de $z' - z = e^{ix}$. Une solution particulière se cherche sous la forme $z'_p(x) = \mu e^{ix}$ avec $\mu \in \mathbb{C}$. On a $z'_p(x) - z_p(x) = \mu(i - 1)e^{ix}$ donc $\mu \frac{1}{i - 1} = -\frac{i + 1}{2}$. Une solution de $y' - y = \cos(x)$ est la partie réelle de z_p . On a donc $y_p(x) = \operatorname{Re} \left(-\frac{i + 1}{2} e^{ix} \right) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}$. On retrouve les solutions de l'exemple 4.

Théorème 6 (Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy). Soit a une fonction continue et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique fonction dérivable vérifiant :

$$\begin{cases} f' + af = 0 \\ f(0) = \lambda \end{cases}$$

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3.1 Définition et structure de l'ensemble des solutions

Définition 2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On considère l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants (E) et l'équation homogène associée (E_H) :

$$y'' + ay' + by = f(t) \quad (E)$$

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (E_H)$$

Théorème 7 (Principe de superposition). Si une fonction y_1 est une solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_1(t)$ et y_2 est solution de $y'' + ay' + by = f_2(t)$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues, alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$.

Conséquence : Si y_P est une solution particulière de (E) , alors pour toute autre solution y de (E) , la fonction $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f(t) - f(t) = 0$, c'est-à-dire solution de (E_H) . On a donc

$$y = y_H + y_P$$

3.2 Résolution de l'équation homogène

On se place toujours dans le cas d'une équation à coefficients constants.

Définition 3. On appelle **équation caractéristique associée à $y'' + ay' + by = 0$** (c'est-à-dire (E_H)) l'équation polynomiale

$$r^2 + ar + b = 0 \quad \text{notée } (E_c)$$

Théorème 8 (Solutions de (E_H) à valeurs complexes). Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On note Δ le discriminant de (E_c) .

- Si $\Delta \neq 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines complexes de (E_c) et les solutions de (E_H) sont les fonctions de la forme : $y_H : t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$
- Si $\Delta = 0$ et r_0 la racine double, les solutions de (E_H) sont : $y_H : t \mapsto (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$

Preuve: quitte à avoir $r_1 = r_2 = r_0$ (si $\Delta = 0$), on a $r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2)$ (forme factorisée), et en particulier les relations coefficients-racines :

$$\begin{cases} a = -(r_1 + r_2) \\ b = r_1 r_2 \end{cases}$$

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $\forall t \in I : z(t) = y(t) e^{-r_1 t}$, de sorte que :

$$\begin{cases} y(t) = z(t) e^{r_1 t} \\ y'(t) = e^{r_1 t} (z'(t) + r_1 z(t)) \\ y''(t) = e^{r_1 t} (z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)) \end{cases}$$

Donc y est solution de (H_2) ssi $\forall t \in I :$

$$e^{r_1 t} \left(z''(t) + \underbrace{(2r_1 + a)}_{r_1 - r_2} z'(t) + \underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=0} z(t) \right) = 0$$

$$\iff z''(t) + (r_1 - r_2) z'(t) = 0$$

On reconnaît alors une EDL d'ordre 1 d'inconnue z' .

- 1^{er} cas : si $r_1 - r_2 \neq 0$ (ce qui équivaut à $\Delta \neq 0$)

La résolution de l'EDL donne :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad tq \quad \forall t \in I, \quad z'(t) = \lambda e^{-(r_1-r_2)t}$$

$$\text{et par suite :} \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}; \quad tq \quad \forall t \in I, \quad z(t) = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{-(r_1-r_2)t} + \mu$$

Enfin, comme $y(t) = z(t)e^{r_1 t}$, c'est équivalent à $y(t) = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + \mu e^{r_1 t}$.

En renommant les constantes $C_1 = \mu$ et $C_2 = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2}$, c'est bien le résultat prévu par le théorème.

- 2^{ème} cas : si $r_1 - r_2 = 0$ (ce qui équivaut à $\Delta = 0$)

z est alors solution de l'équation encadrée ssi :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad \boxed{z''(t) = 0} &\iff \exists C_2 \in \mathbb{C} \quad tq \quad \forall t \in I, \quad \boxed{z'(t) = C_2} \\ &\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{C} \quad tq \quad \forall t \in I, \quad \boxed{z(t) = C_1 + C_2 t} \\ &\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{C} \quad tq \quad \forall t \in I, \quad \boxed{y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}} \quad \underline{ok} \end{aligned}$$

Théorème 9 (solutions de (E_H) à valeurs réelles). On suppose ici que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^2$. Soit Δ le discriminant de (E_c) (forcément réel, lui aussi).

- Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines réelles de (E_c) et les solutions de (E_H) sont de la forme :

$$y_H : t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta = 0$, on note r_0 la racine réelle double et les solutions de (E_H) sont :

$$y_H : t \mapsto (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t} \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta < 0$, alors les deux racines de (E_c) sont complexes conjuguées, notées $r + i\omega$ et $r - i\omega$, où $(r, \omega) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (E_H) sont alors les fonctions de la forme :

$$y_H : t \mapsto (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) e^{rt} \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Preuve: La première remarque fondamentale est que si y est une fonction complexe solution de (E_H) , alors en prenant la partie réelle dans l'égalité $y'' + ay' + by = 0$, on obtient

$$Re(y)'' + a Re(y)' + b Re(y) = 0 \quad (\text{car } a \text{ et } b \text{ sont réels})$$

ce qui signifie que la fonction $Re(y)$ est une solution (réelle, donc) de (H_2) .

Réciproquement, toute fonction réelle solution de (H_2) peut être vue comme la partie réelle d'une solution complexe de (H_2) (elle-même).

Conclusion : les solutions réelles de (H_2) sont très exactement les parties réelles des solutions complexes de (H_2) .

- Si $\Delta > 0$ (et donc r_1 et r_2 sont réelles). Il s'agit de déterminer la partie réelle de

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{où } \boxed{C_1, C_2 \in \mathbb{C}}$$

$$\text{ce qui donne} \quad Re(y(t)) = \underbrace{Re(C_1)}_{\doteq K_1} e^{r_1 t} + \underbrace{Re(C_2)}_{\doteq K_2} e^{r_2 t}$$

K_1 et K_2 sont deux constantes pouvant prendre toutes les valeurs réelles. On obtient bien la forme annoncée par le théorème, à un changement de notations près.

- Si $\Delta = 0$ (et donc r_0 racine double réelle) : même raisonnement.
- Si $\Delta < 0$ (on a donc deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$), il s'agit de prendre la partie réelle de

$$y(t) = C_1 e^{(r+i\omega)t} + C_2 e^{(r-i\omega)t} \quad \text{où } \boxed{C_1, C_2 \in \mathbb{C}}$$

Or :

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{rt} [C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}] \\ &= e^{rt} [C_1 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + C_2 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))] \\ &= e^{rt} [(C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega t)] \end{aligned}$$

Donc :

$$\operatorname{Re}(y(t)) = e^{rt} \left[\underbrace{\operatorname{Re}(C_1 + C_2)}_{\doteq K_1} \cos(\omega t) + \underbrace{\operatorname{Re}(i(C_1 - C_2))}_{\doteq K_2} \sin(\omega t) \right]$$

K_1 et K_2 sont deux constantes pouvant prendre toutes les valeurs réelles. En effet, si l'on fixe $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, le couple de complexes $(C_1, C_2) = (s_1, is_2)$ donne $K_1 = s_1$ et $K_2 = s_2$. On obtient bien la forme annoncée par le théorème, à un changement de notations près.

Exemples 9.

- | | |
|--|---|
| <p>1. Résoudre $y'' - 2y' + y = 0$. On a $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r - 1)^2 = 0$. Les solutions sont de la forme $x \mapsto (Ax + B)e^x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.</p> <p>2. Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$. On a $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r - 1)(r - 2) = 0$. Les solutions sont de la forme $x \mapsto Ae^{2x} + Be^x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.</p> | <p>3. Donner les solutions réelles et complexes de $y'' + y' + y = 0$. On a $r^2 + r + 1 = 0 = (r - j)(r - j^2)$. Les solutions complexes sont $x \mapsto Ke^{jx} + K'e^{j^2x}$, $(K, K') \in \mathbb{C}^2$. Les solutions réelles sont $x \mapsto e^{-x/2} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.</p> |
|--|---|

Remarque. Si les coefficients ne sont pas constants, on se ramène à une équation homogène à coefficients constants par changement de variables.

3.3 Recherche d'une solution particulière

Méthode 2.

• si f est une fonction constante, chercher y_P constante.
 Dans le cas d'une équation à coefficients constants

- si $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P(t)$ un polynôme, alors :
 - si α n'est pas une racine de (E_C) , chercher $y_P(t) = Q(t)e^{\alpha t}$, avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
 - si α est une racine simple de (E_C) , chercher $y_P(t) = Q(t)te^{\alpha t}$, avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
 - si α est une racine double de (E_C) , chercher $y_P(t) = Q(t)t^2e^{\alpha t}$, avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
- si les coefficients a et b sont réels et $f(t) = \sin(\Omega t)$ ou $\cos(\Omega t)$, chercher $y_P(t) = \lambda \cos(\Omega t) + \mu \sin(\Omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
 Pour aller plus vite, on peut aussi trouver une solution particulière complexe de $y'' + ay' + by = e^{i\Omega t}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\Omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\Omega t)$).

Exemples 10.

1. Trouver une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = xe^{4x}$ puis xe^{2x} . On cherche y_p sous la forme $(ax + b)e^{4x}$, on trouve $a = \frac{1}{6}$ et $b = -\frac{5}{36}$.
Trouver une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$.
On cherche y_p sous la forme $(ax^2 + bx)e^{2x}$, on trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = -1$.
2. Trouver une solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^x$. On cherche y_p sous la forme ax^2e^x , on trouve $a = \frac{1}{2}$.
3. Trouver une solution particulière de $y'' + y = \cos(x)$. $y_p(x) = -\frac{x}{2}ie^{ix}$.

Méthode 3.

Si a, b, c et f sont polynomiales, on travaille sur le coefficient dominant pour trouver le degré d'une solution particulière puis on la détermine

Exemple 11. Déterminer une solution polynomiale de l'équation $x^2y'' - 2xy' - 2y = x + 2$. On suppose qu'il existe une solution polynomiale de terme dominant a_nx^n avec $n \in \mathbb{N}$. Alors le terme dominant du membre de gauche est $(n(n-1) - 2n - 2)a_nx^n$, il doit être égal à x ce qui impose $n = 1$ et $a_1 = -\frac{1}{4}$. On pose ensuite $y_p = -\frac{x}{4} + b$ avec $b \in \mathbb{R}$. En réinjectant dans l'équation, on obtient $b = -1$.

3.4 Résolution de l'équation complète

Théorème 10.

Les fonctions $I \rightarrow \mathbb{K}$ solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme

$$y = y_H + y_P$$

où y_H est une solution de l'équation homogène (E_H) et y_P est une solution particulière de (E) .

Exemple 12. Résoudre les équations données dans le paragraphe précédent.

Théorème 11.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Soit $t_0 \in I$.

Alors pour tout couple $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ sur I qui satisfait le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Interprétation physique : en mécanique du point, l'équation du mouvement ne suffit pas à déterminer la trajectoire de l'objet. Typiquement, on la détermine en utilisant les conditions initiales : **position initiale** (y_0) et **vitesse initiale** (v_0).