Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
Feuille 6

TD 6 : Nombres complexes.

classique   demande réflexion

1 Manipulation de nombres complexes

Exercice 1.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z-1| = |z+1|$ en utilisant la conjugaison.

Exercice 2.
Pour tout $z \neq i$, on pose $h(z) = \dfrac{(z+i)}{z-i}$.

1. Montrer que (z est de module 1 et $z \neq i$) $\Leftrightarrow$ ($h(z) \in i\mathbb{R}$).
2. Montrer que $|z| < 1 \Leftrightarrow \mathscr{R}e(h(z)) < 0$.

Exercice 3.
Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
3. Montrer que $f|^{\mathbb{U}}$ est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Exercice 4.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| < \dfrac{1}{2}$, montrer que $|z| > \dfrac{1}{2}$.

2 Géométrie

Exercice 5.
Déterminer l'ensemble des z tel que $\dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.
Déterminer l'ensemble des z tels que $|(1+i)z - 2i| = 2$.

Exercice 7.
Soient a, b réels distincts, $n \in \mathbb{N}^\star$, résoudre $(z-a)^n = (z-b)^n$. Montrer que les solutions sont les affixes de points appartenant à une même droite verticale.

Exercice 8.
On considère l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z+1}\right)^4 = 1$.

1. Donner les solutions de l'équation.
2. Placer les images des solutions sur un dessin.
3. Montrer que les images des solutions appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3 Trigonométrie

Exercice 9.

Résoudre $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$.

Exercice 10.

Résoudre $\cos(2x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 11.

Résoudre $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$.

Exercice 12.

Résoudre $\cos^2(x) + 3\cos(2x) = 4$.

Exercice 13.

Résoudre $0 \leqslant \sin(x)$.

Exercice 14.
Résoudre $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 15.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Exercice 16.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$.

4 Résolution d'équations

Exercice 17.

Calculer les racines carrées des nombres suivants :

- $z_1 = -2$
- $z_2 = i$
- $z_3 = 1+i$
- $z_4 = \dfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$
- $z_5 = 3+4i$
- $z_6 = -3+4i$

Exercice 18.

Résoudre $z^5 = 1 - i$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 19.
Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Résoudre $\left(\dfrac{z+2i}{z-i}\right)^n = 1$.

Exercice 20.
Résoudre $z^4 + 8z^2 + 160 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 21.
Résoudre $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$ dans $\mathbb{C}$.

5 Si besoin de davantage d'entrainement

Exercice 22.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\mathscr{R}e(z) = \mathscr{I}m(z) \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$ en utilisant la conjugaison.

Exercice 23.
Soient z, z' deux complexes. Montrer que

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

Exercice 24.
Déterminer l'ensemble des z tel que $\dfrac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$.

Exercice 25.
Déterminer l'ensemble des z tels que $|2iz - 1 + i| = 1$.

Exercice 26.
Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 27.

Résoudre $4\sin(x)\cos(x) = 1$.

Exercice 28.

Résoudre $\cos(2x) - 2\sin^2(x) = 0$.

Exercice 29.

Résoudre $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Exercice 30.

Résoudre $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 31.

Résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 32.

Résoudre $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \geqslant \cos(x)$.

Exercice 33.

Résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 0$.

Exercice 34.
Résoudre $\cos^2(x) - 2\sin x \cos x - \sin^2(x) = 0$.

Exercice 35.
Résoudre $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 36.

Résoudre $z^5 = -2 + 2i$ dans $\mathbb{C}$.

6 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 37.
Soient a, b deux éléments distincts de $\mathbb{U}$. Montrer que pour tout complexe z,

$$u = \frac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{b-a} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 38.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z+1| < \dfrac{1}{2}$, montrer que $\left|z^2+1\right| > \dfrac{3}{4}$.

Exercice 39.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $|z| \leqslant |z|^2 + |z-1|$.

Exercice 40.
Soit $z \in \mathbb{U}$, montrer que l'on a $|z+1| \geqslant 1$ ou $\left|z^2+1\right| \geqslant 1$. Peut-on avoir les deux?

Exercice 41.

Résoudre $z^5 = \overline{z}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 42.
Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u + v$ et u^2.
2. En déduire la valeur de $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$.

Exercice 43.
Montrer que
$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

Exercice 44.

Résoudre $|\cos(3x-1)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Memo

- Comment déterminer la partie réelle/imaginaire ?
  - Utiliser la forme exponentielle
  - Se ramener à une forme algébrique ($a + ib$)
  - Utiliser la factorisation par l'arc moitié
- Comment déterminer le module et l'argument ? Se ramener à la forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ en faisant bien attention au signe de ρ.
- Comment transformer une expression trigonométrique ? Cela dépend évidemment de l'expression (de la forme $e^{ip} + e^{iq}$, polynôme en cos ou sin, cos ou sin d'un angle multiple etc).
  - Utiliser la factorisation par l'arc moitié (permet de factoriser toute expression de la forme $e^{ip} \pm e^{iq}$, y compris le cas particulier $e^{ip} = 1$).
  - Utiliser la formule d'Euler pour transformer une puissance en un angle multiple
  - Utiliser la formule de Moivre pour exprimer un cosinus ou sinus d'un angle multiple comme un polynôme en cos ou sin.
  - Utiliser les formules trigonométriques : à partir de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, on retrouve facilement la formule pour transformer une somme du type $\cos p + \cos q$ en un produit.
- Comment déterminer une racine carrée ?
  - Observer s'il n'y a pas de racine connue (évidente)
  - Utiliser la forme exponentielle
  - En dernier recours, poser $z = x + iy$ et résoudre un système
- Comment résoudre une équation complexe ?
  - Appliquer la formule du cours dans le cas d'une équation du type polynôme du second degré, $Z^n = A$ ou $e^z = a$.
  - Se ramener à une équation qu'on sait résoudre (ie, du type ci-dessus) par un changement de variable.

Correction du TD n 6

Correction 1 On raisonne par équivalence. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}
& |z-1| = |z+1| \\
\Leftrightarrow\ & |z-1|^2 = |z+1|^2 \text{ par positivité du module} \\
\Leftrightarrow\ & (z-1)\overline{z-1} = (z+1)\overline{z+1} \\
\Leftrightarrow\ & z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2(z+\overline{z}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\mathscr{R}e(z) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z \in i\mathbb{R}
\end{aligned}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

Correction 2 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On met $h(z)$ sous forme algébrique :

$$h(z) = \frac{(z+i)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2} = \frac{|z|^2 - 1 + 2i\mathscr{R}e(z)}{|z-i|^2}.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On raisonne par équivalence :

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \mathscr{R}e(h(z)) = 0 \Leftrightarrow h(z) \in i\mathbb{R}.$$

2. On a $\mathscr{R}e(h(z)) = \dfrac{|z|^2-1}{|z-i|^2}$ donc

$$\mathscr{R}e(h(z)) < 0 \Leftrightarrow |z| < 1.$$

Correction 3

1. Il suffit de montrer que $\forall z \in \mathbb{U}, 1 - \overline{a}z \neq 0$. On suppose par l'absurde qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $1 - \overline{a}z = 0$. On a alors $\overline{a}z = 1$ d'où, en prenant le module, $|\overline{a}| = 1$ ce qui est absurde. On a montré que f est bien définie.

2. Soit $z \in \mathbb{U}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
|f(z)| = 1 \ \Leftrightarrow\ & \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = 1 \\
\Leftrightarrow\ & |z-a| = \left|1-\overline{a}z\right| \\
\Leftrightarrow\ & (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) \\
\Leftrightarrow\ & z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + \overline{a}a = 1 - a\overline{z} - \overline{a}z + a\overline{a}z\overline{z} \\
\Leftrightarrow\ & |z|^2 + |a|^2 = 1 + |z|^2|a|^2 \\
\Leftrightarrow\ & 1 + |a|^2 = 1 + |a|^2 \text{car } |z| = 1
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est et $f(z) \in \mathbb{U}$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{U}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
f(z) = \alpha \Leftrightarrow\ & \frac{z-a}{1-\overline{a}z} = \alpha \\
\Leftrightarrow\ & (z-a) = \alpha(1-\overline{a}z) \\
\Leftrightarrow\ & z(1+\overline{a}\alpha) = a + \alpha \\
\Leftrightarrow\ & z = \frac{a+\alpha}{1+\overline{a}\alpha} \text{car } 1 + \overline{a}z \neq 0 \text{ d'après la première question}
\end{aligned}$$

Par analogie avec la question précédente, on montre que $\left|\dfrac{a+\alpha}{1+\overline{a}\alpha}\right| = 1$ ce qui montre que l'équation $f(z) = \alpha$ admet une solution dans $\mathbb{U}$ donc $f|^{\mathbb{U}}$ est bijective. Sa bijection réciproque est définie par $z \mapsto \dfrac{a+z}{1+\overline{a}z}$.

Correction 4 Soit $z \in \mathbb{C}$, on écrit $z = 1-(1-z)$, on a donc $|z| \geqslant 1 - |1-z|$. Or $|1-z| < \dfrac{1}{2}$, on a donc $|z| > \dfrac{1}{2}$.

Correction 5 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.Notons M, P et P' les points d'affixes respectives z, 1 et -1. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ & M, P, P' \text{ sont alignés} \\
\Leftrightarrow\ & M \text{ appartient à l'axe des abscisses} \\
\Leftrightarrow\ & z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

On peut aussi raisonner avec la conjugaison :

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z-1}{z+1} = \overline{\dfrac{z-1}{z+1}} \\ \Leftrightarrow & (z-1)(\overline{z}+1) = (\overline{z}-1)(z+1) \\ \Leftrightarrow & z\overline{z}+z-\overline{z}-1 = \overline{z}z+\overline{z}-z-1 \\ \Leftrightarrow & 2(z-\overline{z}) = 0 \\ \Leftrightarrow & 4i\mathscr{I}m(z) = 0 \\ \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R} \end{array}$$

L'ensemble recherché est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Correction 6 On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & |(1+i)z-2i| = 2 \\ \Leftrightarrow & \left|z-\dfrac{2i}{1+i}\right| = \sqrt{2} \text{En divisant l'égalité par } |1+i| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & |z-(1+i)| = \sqrt{2} \end{array}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre l'image de $1+i$, de rayon $\sqrt{2}$.

Correction 7 Comme a et b sont distincts, $z \neq b$. On a $\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z-a}{z-b} = e^{2ik\pi/n}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $z-a \neq z-b$, on exclut le cas $k=0$.

On a alors :

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{z-a}{z-b} = e^{2ik\pi/n} \\ \Leftrightarrow & z-a = (z-b)e^{2ik\pi/n} \\ \Leftrightarrow & z(1-e^{2ik\pi/n}) = a-be^{2ik\pi/n} \\ \Leftrightarrow & z = \dfrac{a-be^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}},\ k \in [\![1, n-1]\!] \text{car } \forall k \in [\![1, n-1]\!] \text{ donc } e^{2ik\pi/n} \neq 1 \end{array}$$

On remarque que les solutions correspondant à $k=1$ et $k=n-1$ sont conjuguées et leurs affixes appartiennent donc à la droite verticale d'abscisses leur partie réelle commune. Il suffit de montrer que toutes les racines de l'équation ont la même partie réelle.

On utilise la factorisation par l'arc moitié au dénominateur :

$$1-e^{2ik\pi/n} = -e^{ik\pi/n}2i\sin\frac{k\pi}{n},$$

donc

$$\frac{1}{1-e^{2ik\pi/n}} = \frac{ie^{-ik\pi/n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

On a :

$$\frac{a-be^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}} = \frac{ie^{-ik\pi/n}(a-be^{2ik\pi/n})}{2\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{i(ae^{-ik\pi/n}-be^{ik\pi/n})}{2\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

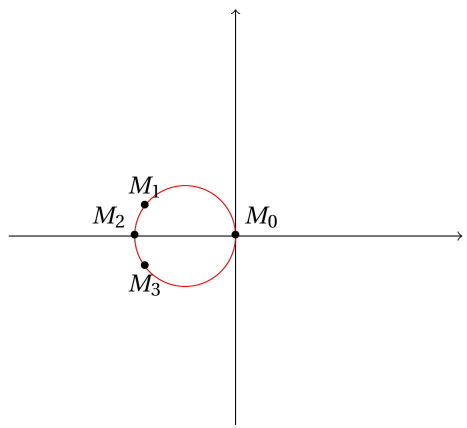
Pour un nombre complexe Z, la partie réelle de iZ est égale à l'opposé de la partie imaginaire de Z donc

$$\mathscr{R}e\left(\frac{a-be^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}}\right) = -\mathscr{I}m\left(\frac{ae^{-ik\pi/n}-be^{ik\pi/n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}}\right) = \frac{a\sin\frac{k\pi}{n}+b\sin\frac{k\pi}{n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{a+b}{2}.$$

On en déduit que toutes les solutions ont même partie réelle, elles sont donc les affixes de points alignés, appartenant à une droite verticale.

Correction 8

1. On cherche à résoudre $\left(\dfrac{2z+1}{z+1}\right)^4 = 1$. Les racines quatrième de l'unité sont $e^{\frac{2ik\pi}{4}} = e^{\frac{ik\pi}{2}}$ pour k variant de 0 à 3. On a donc :
$$\left(\frac{2z+1}{z+1}\right)^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \left(\frac{2z+1}{z+1}\right) = e^{\frac{ik\pi}{2}},\ k \in [\![0,3]\!]$$
$$\Leftrightarrow z = -\left(\frac{1-e^{\frac{ki\pi}{2}}}{2-e^{\frac{ki\pi}{2}}}\right),\ k \in [\![0,3]\!]$$
En calculant explicitement ces valeurs pour $k = 0,1,2$ puis 3, on trouve $z_0 = 0$, $z_1 = -\dfrac{3}{5}+\dfrac{i}{5}$, $z_2 = -\dfrac{2}{3}$ et $z_3 = -\dfrac{3}{5}-\dfrac{i}{5}$.
2. On note $M_0, \dots, M_3$ les points d'affixes $z_0, \dots, z_3$. On a la figure suivante :



3. Si les quatre points sont cocycliques, le centre du cercle est sur la médiatrice des deux points M_1 et M_3 donc sur l'axe réel car leurs affixes sont conjuguées. Le centre doit également être sur la médiatrice de M_0 et M_2 c'est-à-dire sur la droite $y=-\dfrac{1}{3}$. Cela implique que le rayon est $\dfrac{1}{3}$. Pour montrer que les quatre points appartiennent bien au cercle de centre $(-\frac{1}{3},0)$ et de rayon $\frac{1}{3}$, il suffit de vérifier que les modules des nombres complexes $z_i-(-\frac{1}{3})=z_i+\frac{1}{3}$, pour $i\in[\![0,3]\!]$ valent $\frac{1}{3}$. On calcule donc $z_0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, $z_1+1=-\frac{4}{15}+\frac{i}{5}$, $z_3+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$ et $z_4+1=-\frac{4}{5}-\frac{i}{5}$. On vérifie facilement que $|z_i+1|^2=\frac{1}{9}$ pour tout $i\in[\![0,3]\!]$ donc les points sont cocycliques et ils appartiennent au centre d'affixe $-\frac{1}{3}$ et de rayon $\frac{1}{3}$.

   On peut aussi remarquer, que le triangle $M_0M_1M_3$ est isocèle donc le centre du cercle circonscrit au triangle appartient à la médiane de M_1M_3 qui est l'axe réel puisque z_1 et z_3 sont conjugués. On cherche un réel ω tel que $|0-\omega|=|-\frac{3}{5}+\frac{i}{5}-\omega|$. On trouve $\omega=-\frac{1}{3}$ donc le cercle circonscrit à $M_0M_1M_3$ est le cercle de centre $(-\frac{1}{3},0)$ et de rayon $\frac{1}{3}$. On vérifie ensuite que M_2 appartient à ce cercle.

   Remarque. il est également possible de résoudre le système

$$|z_\Omega|=|-\frac{2}{3}-z_\Omega|=|-\frac{3}{5}+\frac{i}{3}-z_\Omega|=|-\frac{3}{5}-\frac{i}{3}-z_\Omega|$$

   en cherchant z_Ω sous la forme $a+ib$, a,b réels. les deux premières égalités (au carré) donnent $a=-\frac{1}{3}$. On injecte la valeur de a dans l'égalité $|z_\Omega|^2=|-\frac{3}{5}+\frac{i}{3}-z_\Omega|^2$, on trouve $b=0$ donc $z_\Omega=-\frac{1}{3}$. On a donc $|-\frac{3}{5}+\frac{i}{3}-z_\Omega|=|-\frac{3}{5}-\frac{i}{3}-z_\Omega|$ et les quatre modules sont donc bien égaux.

Correction 9 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
&\sin(5x)=\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}+x\right)\\
\Leftrightarrow\quad &5x=\tfrac{2\pi}{3}+x+2k\pi \text{ ou } 5x=\pi-\left(\tfrac{2\pi}{3}+x\right)+2k\pi,\text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\quad &x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \text{ ou } x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},\text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\quad &x\equiv\frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x\equiv\frac{\pi}{18}\left[\frac{\pi}{3}\right]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Correction 10 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
&\cos(2x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\\
\Leftrightarrow\quad &2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } 2x=-x+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\quad &x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\quad &x\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x\equiv\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]
\end{aligned}.$$

L'ensemble des solutions est :

$$\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Correction 11 On a $\cos^2(x)-\sin^2(x)=0\Leftrightarrow\cos(x)=\pm\sin(x)$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
&\cos(x)=\sin(x)\\
\Leftrightarrow\quad &\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\
\Leftrightarrow\quad &x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\quad &x\equiv\pm\left(\frac{\pi}{2}-x\right)[2\pi]\\
\Leftrightarrow\quad &x\equiv\frac{\pi}{2}-x[2\pi]\text{car on ne peut avoir } x\equiv x-\frac{\pi}{2}[2\pi]\\
\Leftrightarrow\quad &x\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]
\end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on a $\cos(x)=-\sin(x)\Leftrightarrow\cos(-x)=\sin(-x)$ donc, d'après ce qui précède, $x=-\dfrac{\pi}{4}[\pi]$.

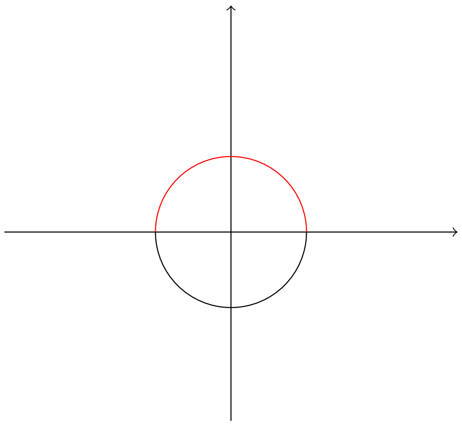
L'ensemble des solutions est donc $\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Correction 12 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
&\cos^2(x)+3\cos(2x)=4\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{\cos(2x)+1}{2}+3\cos(2x)=4\\
\Leftrightarrow\quad &\cos(2x)=1\\
\Leftrightarrow\quad &2x\equiv0[2\pi]\\
\Leftrightarrow\quad &x\equiv0[\pi]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Correction 13 On a la figure suivante :



Si $x\in[0,2\pi]$, on a $\sin(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in[0,\pi]$, on en déduit donc que l'ensemble des solutions est $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi]$.

Correction 14 On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \tan\left(3x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\tan\left(x+\dfrac{4\pi}{5}\right)\\ \Leftrightarrow & 3x-\dfrac{\pi}{5}=x+\dfrac{4\pi}{5}+k\pi,\text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\ \Leftrightarrow & x=\dfrac{k\pi}{2},\text{ avec } k\in\mathbb{Z}\end{array}.$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Correction 15 On a

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}e\left(e^{ikx}\right)=\mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right).$$

On reconnaît une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\frac{e^{(n+1)ix}-1}{e^{ix}-1}.$$

On factorise par l'arc moitié pour déterminer sa partie réelle :

$$\frac{e^{(n+1)ix}-1}{e^{ix}-1}=\frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}}2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{e^{\frac{inx}{2}}\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Correction 16 On écrit :

$$\forall k\in[|0,n|],\ \ \cos^2(kx)=\frac{1}{2}\cos(2kx)+\frac{1}{2}$$

d'où :

$$\begin{array}{ll}\sum\limits_{k=0}^{n}\cos^2(kx) & =\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\cos(2kx)+\frac{1}{2}\right)\\ & =\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(2kx)+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\\ & =\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}+\dfrac{n+1}{2}\\ & \text{en utilisant l'exercice 15 avec } 2x \text{ dans le rôle de } x.\end{array}.$$

Correction 17

1. Les racines carrées de -2 sont $\pm i\sqrt{2}$.
2. Les racines carrées de $i=e^{\frac{i\pi}{2}}$ sont $\pm e^{\frac{i\pi}{4}}$.
3. On écrit $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc les racines carrées sont $\pm\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}$.
4. On écrit $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-\frac{i\pi}{3}}$ donc les racines carrées sont $\pm e^{-\frac{i\pi}{6}}$.
5. Il n'y a pas de forme trigonométrique simple de $3+4i$, on cherche donc ses racines carrées sous la forme $a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a $a^2+b^2=|3+4i|=5$, $a^2-b^2=\mathcal{R}e(3+4i)=3$ et $2ab=\mathcal{I}m(3+4i)=4$ d'où $a=\pm 2$ et $b=\pm 1$. Comme $ab>0$, les racines carrées de $3+4i$ sont $\pm(2+i)$.

6. Il n'y a pas de forme trigonométrique simple de $-3+4i$, on cherche donc ses racines carrées sous la forme $a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a $a^2+b^2=|-3+4i|=5$, $a^2-b^2=\mathscr{R}e(-3+4i)=-3$ et $2ab=\mathscr{I}m(-3+4i)=4$ d'où $a=\pm1$ et $b=\pm2$. Comme $ab>0$, les racines carrées de $1+2i$ sont $\pm(1+2i)$.

Correction 18 On commence par mettre $1-i$ sous forme exponentielle :

$$1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

Les racines 5-ièmes de $1-i$ sont donc $\sqrt[5]{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\pi}{20}+\frac{2ik\pi}{5}}=\sqrt[10]{2}e^{-\frac{i\pi}{20}+\frac{2ik\pi}{5}}$ pour k variant de 0 à 4.

Correction 19 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+2i}{z-i}\right)^n=1 &\Leftrightarrow \exists k\in[|0,n-1|], \frac{z+2i}{z-i}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in[|0,n-1|], z+2i=(z-i)e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in[|0,n-1|], (1-e^{\frac{2ik\pi}{n}})z=-i\left(2+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

Si $k=0$, il n'y a pas de solution. On a donc $k\in[|1,n-1|]$:

$$\left(\frac{z+2i}{z-i}\right)^n=1 \quad\Leftrightarrow \exists k\in[|1,n-1|], z=\frac{-i\left(2+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

Les solutions sont donc les complexes de la forme $\dfrac{i\left(2+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}$ pour k variant de 1 à $n-1$.

Correction 20 On pose $Z=z^2$, il faut alors résoudre l'équation $Z^2+8Z+160=0$ dont le discriminant vaut $(24i)^2$ et les solutions sont $-4\pm12i$. On doit maintenant chercher les racines carrées de ces deux solutions. On cherche les racines carrées de $-4+12i$ sous la forme $a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\left\{\begin{array}{lll} a^2+b^2 &=& 4\sqrt{10}\\ a^2-b^2 &=& -4 \text{ et}\\ 2ab &=& 12\end{array}\right. ,$$

Cela implique $a=\pm\sqrt{2\sqrt{10}-2}$ et $b=\pm\sqrt{2\sqrt{10}+2}$. Comme $ab>0$, les racines carrées de $-4+12i$ sont

$$\pm\left(\sqrt{2\sqrt{10}-2}+i\sqrt{2\sqrt{10}+2}\right).$$

De la même manière, on trouve que les racines carrées de $-4-12i$ sont

$$\pm\left(\sqrt{2\sqrt{10}-2}-i\sqrt{2\sqrt{10}+2}\right).$$

On en déduit que les solutions de l'équation sont

$$\pm\left(\sqrt{2\sqrt{10}-2}+i\sqrt{2\sqrt{10}+2}\right) \text{ et } \pm\left(\sqrt{2\sqrt{10}-2}-i\sqrt{2\sqrt{10}+2}\right).$$

Correction 21 Le discriminant vaut $-3+4i$ dont une racine carrée est $1+2i$ (d'après l'exercice 17). Les solutions sont donc, après simplification, $1+i$ et $2+3i$.

Correction 22 On raisonne par équivalence. Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} & |z-1|=|z-i|\\ \Leftrightarrow\ & |z-1|^2=|z-i|^2 \text{ par positivité du module}\\ \Leftrightarrow\ & (z-1)\overline{(z-1)}=(z-i)\overline{(z-i)}\\ \Leftrightarrow\ & z\overline{z}-z-\overline{z}+1=z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1\\ \Leftrightarrow\ & -(z+\overline{z})=i(z-\overline{z})\\ \Leftrightarrow\ & -2\mathscr{R}e(z)=i(2i\mathscr{I}m(z)\\ \Leftrightarrow\ & \mathscr{R}e(z)=\mathscr{I}m(z)\end{aligned}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

Correction 23 On écrit :

$$\begin{aligned} & |z+z'|^2+|z-z'|^2=(z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')}\\ =\ & (z+z')(\overline{z}+\overline{z}')+(z-z')(\overline{z}-\overline{z}')\\ =\ & |z|^2+z'\overline{z}+z\overline{z}'+|z'|^2+|z|^2-z'\overline{z}-z\overline{z}'+|z'|^2\\ =\ & 2\left(|z|^2+|z'|^2\right).\end{aligned}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

Correction 24 Soit $z\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Notons M, P et P' les points d'affixes respectives z, i et 1. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & \frac{z-i}{z-1}\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow\ & M, P, P' \text{ sont alignés}\\ \Leftrightarrow\ & M \text{ appartient à la droite } (PP')\\ \Leftrightarrow\ & M \text{ appartient à la droite } y=-x+1\end{aligned}$$

L'ensemble recherché est donc l'ensemble des complexes $z \neq 1$ dont l'image appartient à la droite $y = -x+1$.

Correction 25 On divise l'équation par $|2i|$, on obtient $\left|z + \dfrac{i-1}{2i}\right| = \dfrac{1}{2}$, que l'on peut réécrire $\left|z + \dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$. On en déduire que l'ensemble des solutions est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre l'image de $-\left(\dfrac{1+i}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

Correction 26 On doit avoir $|z| = |\frac{1}{z}| = |1-z|$ on a donc $|z| = 1$. Posons $z = x + iy$, on a alors $|1-z| = 1$ ce qui implique $(x-1)^2 + y^2 = 1$ et comme $x^2 + y^2 = |z|^2 = 1$, on a $x = \frac{1}{2}$ et $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les complexes recherchés sont donc $e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$.

Correction 27

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& 4\sin(x)\cos(x) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\sin(2x) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \sin(2x) = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & 2x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \frac{\pi}{6}[2\pi] \\
\Leftrightarrow\quad & x \equiv \frac{\pi}{12}[\pi] \text{ ou } \frac{5\pi}{12}[\pi]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\dfrac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction 28 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& \cos(2x) - 2\sin^2(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sin^2(x) = \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & \sin(x) = \pm\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & x \equiv \pm\frac{\pi}{6}[\pi]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

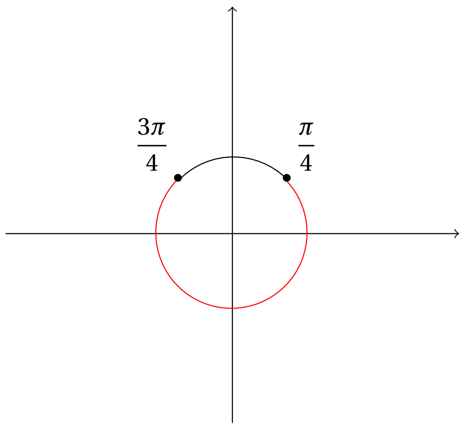
Correction 29 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& \sin\left(2x - \tfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\tfrac{x}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\tfrac{x}{3}\right) \text{ car } \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(a) \\
\Leftrightarrow\quad & 2x - \frac{5\pi}{6} = \frac{x}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{x}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{\pi}{2} + \frac{6k\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{14} + \frac{6k\pi}{7}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

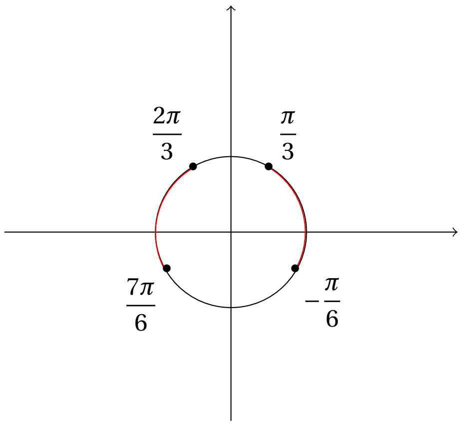
$$\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{6k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{14} + \frac{6k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Correction 30 On a la figure suivante :



Si $x \in [0, 2\pi]$, on a $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$, on en déduit que l'ensemble des solutions est $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right]\right)$.

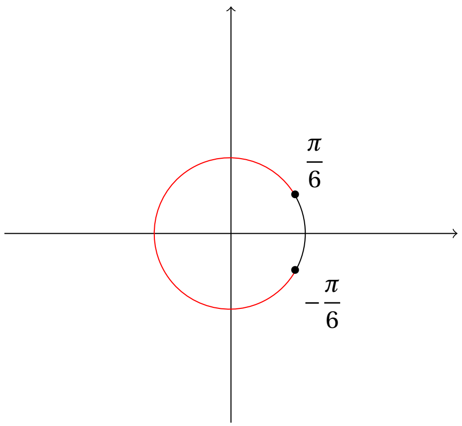
Correction 31 On a la figure suivante :



Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, on a $-\frac{1}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$, on en déduit que l'ensemble des solutions est :

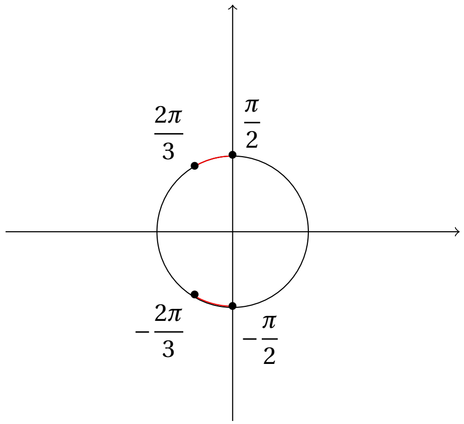
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right] \right).$$

Correction 32 On a la figure suivante :



Si $x \in [0, 2\pi]$, on a $\frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant \cos(x) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ donc l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right]$.

Correction 33



Si $x \in [-\pi, \pi]$, on a $-\frac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ donc l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

Correction 34 On a $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ et $2\sin x \cos x = \sin(2x)$ donc l'équation est équivalente à :

$$\cos(2x) = \sin(2x),$$

soit encore

$$\cos(2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right).$$

On ne peut avoir $2x = 2x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, on en déduit que $2x = -\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ ce qui se réécrit :

$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Correction 35 Le discriminant vaut $-75-100i=-25(3+4i)$. Pour en trouver une racine carrée, nous allons chercher une racine carrée de $3+4i$. D'après l'exercice 17, une racine carrée de $3+4i$ est $2+i$. On a alors $5i(2+i)=-5+10i$ une racine carrée du discriminant. Les solutions sont donc, après simplification, $-2i$ et $5-12i$.

Correction 36 On écrit $-2+2i$ sous forme exponentielle :

$$-2+2i=2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

Les racines 5-ièmes de $-2+2i$ sont donc $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{20}+\frac{2ik\pi}{5}}=\sqrt[10]{8}e^{\frac{3i\pi}{20}+\frac{2ik\pi}{5}}$ pour k variant de 0 à 4.

Correction 37 On calcule le conjugué de u :

$$\begin{aligned}
&\overline{\frac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{b-a}}\\
&=\frac{\overline{z+ab\overline{z}-(a+b)}}{\overline{b-a}}\\
&=\frac{\overline{z}+\overline{ab}z-(\overline{a}+\overline{b})}{\overline{b}-\overline{a}}\\
&=\frac{\overline{z}+\frac{z}{ab}-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\text{ car}, \forall c\in\mathbb{U}, \frac{1}{c}=\overline{c}\\
&=\frac{ab\left(\overline{z}+\frac{z}{ab}-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\right)}{ab\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}\\
&=\frac{ab\overline{z}+z-(a+b)}{a-b}\\
&=-u
\end{aligned}$$

On a donc montré que u est un imaginaire pur.

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{b-a}\\
&=\frac{\left(z+ab\overline{z}-(a+b)\right)(\overline{b}-\overline{a})}{|b-a|^2}
\end{aligned}$$

puis développer le numérateur :

$$\begin{aligned}
&\left(z+ab\overline{z}-(a+b)\right)(\overline{b}-\overline{a})\\
=\ & z(\overline{b}-\overline{a})+ab(\overline{b}-\overline{a})\overline{z}-(a+b)(\overline{b}-\overline{a})\\
=\ & z(\overline{b}-\overline{a})+(a|b|^2-b|a|^2)\overline{z}-(a\overline{b}-|a|^2+|b|^2-b\overline{a})\\
=\ & z(\overline{b}-\overline{a})+(a-b)\overline{z}-(a\overline{b}-b\overline{a})\text{ car }|a|=1=|b|\\
=\ & z(\overline{b}-\overline{a})-\overline{z(\overline{b}-\overline{a})}-(a\overline{b}-\overline{a\overline{b}})\\
=\ & 2i\mathscr{I}m\left(z(\overline{b}-\overline{a})\right)-2i\mathscr{I}m\left(a\overline{b}\right).
\end{aligned}$$

On retrouve que u est un imaginaire pur mais avouez que c'est moins joli!

Correction 38 On sait que $|z+1|^2<\frac{1}{4}$ et $|z|=|z+1-1|\geqslant 1-|z+1|$ donc $|z|>\frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\left|z^2+1\right|=\left|(z+1)^2-2z\right|\geqslant 2|z|-|z+1|^2\geqslant\frac{3}{4}$$

Correction 39

— Si $|z|\geqslant 1$, alors $|z|\leqslant|z|^2$ donc l'inégalité est vraie.

— Si $|z|<1$, on écrit $|z|=\left|z-z^2+z^2\right|<|z||1-z|+|z|^2$ et l'inégalité est vraie puisque $|z|<1$.

Correction 40 On écrit $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in[-\pi,\pi]$, on a alors $|z+1|=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$ et $\left|z^2+1\right|=2|\cos\theta|$ en factorisant par l'arc moitié. Si $\left|z^2+1\right|<1$, alors $\theta\in\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[$. On a alors $\frac{\theta}{2}\in\left]-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$ donc $\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|>\frac{1}{2}$ et $|z+1|>1$. On a donc bien montré que l'on a toujours l'une des deux quantités $|z+1|$ et $\left|z^2+1\right|$ qui est supérieur à 1.

Si on a égalité, on a $\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$ et $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\frac{1}{2}$ ce qui n'est possible que pour $\theta\equiv\pm\frac{2\pi}{2}[2\pi]$ autrement dit pour $z=j$ ou $z=j^2$.

Correction 41 Analyse : Soit z une solution. Si $z\neq 0$, l'égalité des modules $|z|^5=|z|$ impose $|z|=1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
& z^5=\overline{z}\\
\Leftrightarrow\ & z^6=z\overline{z}\\
\Leftrightarrow\ & z^6=|z|^2\\
\Leftrightarrow\ & z^6=1\text{car }|z|=1
\end{aligned}$$

On sait que les racines 6-ièmes de l'unité sont $e^{\frac{2ik\pi}{6}}=e^{\frac{ik\pi}{3}}$, $k\in[\![0,5]\!]$.

Synthèse : $z=0$ et solution et si $z^6=1$, on a $|z|=1$ et $z^5=\overline{z}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\left\{e^{\frac{ik\pi}{3}},k\in[\![0,5]\!]\right\}\cup\{0\}.$$

Autre méthode :

$z=0$ est solution. Soit $z\neq 0$, on écrit $z=re^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $r>0$. On a

$$\begin{aligned} z^5=\overline{z} &\Leftrightarrow r^5e^{5i\theta}=re^{-i\theta}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^5=r\\ 5\theta\equiv-\theta\,[2\pi]\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r=1\\ \theta\equiv 0\left[\dfrac{\pi}{6}\right]\end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\left\{e^{\frac{ik\pi}{3}}, k\in[\![0,5]\!]\right\}\cup\{0\}.$$

Correction 42

1. On a $u+v=-1$ car la somme des racines 7ièmes de l'unité vaut 0 et $u^2=u+2v$.
2. On en déduit que u vérifie $u^2+u+2=0$. On cherche les racines de cette équation, on trouve $\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$. Reste à encadrer la partie imaginaire de u pour savoir si elle est positive ou non. On a $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\dfrac{8\pi}{7}\leqslant 0$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\dfrac{4\pi}{7}\leqslant 1$ donc la somme des deux sinus est positive, on en déduit que

$$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Correction 43

On pose $z=e^{\frac{2i\pi}{11}}$ et on écrit $\sum_{k=1}^{10}z^k=-1$ puis, comme $z^k=\overline{z^{11-k}}$, on a

$$\sum_{k=1}^{5}2\cos\frac{2k\pi}{11}=-1$$

On remarque enfin que $\cos\dfrac{2\pi}{11}=-\cos\dfrac{9\pi}{11},\cos\dfrac{4\pi}{11}=-\cos\dfrac{7\pi}{11},\dots,\cos\dfrac{10\pi}{11}=-\cos\dfrac{\pi}{11}$.

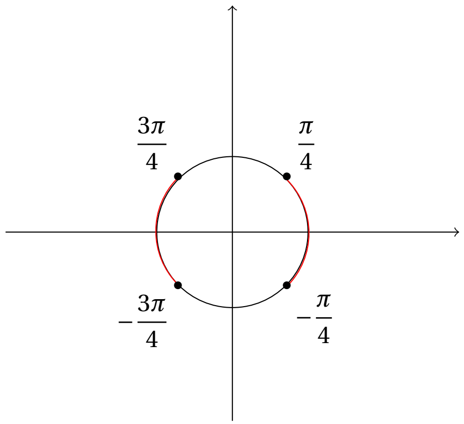
On obtient

$$-2\sum_{k=0}^{4}\cos\frac{(k+1)\pi}{11}=-1,$$

puis le résultat souhaité en divisant par -2.

Correction 44

On commence par résoudre $|\cos(y)|\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Si $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $|\cos(y)|\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow y\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ donc pour $y\in\mathbb{R}$, on a :

$$\cos(y)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow y\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]\right).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &|\cos(3x-1)|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \Leftrightarrow\ &(3x-1)\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]\right)\end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions est :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[\frac{1}{3}-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\frac{1}{3}+\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3},\frac{1}{3}+\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right]\right).$$