Réponses du TD n7

Réponse 1 $\frac{1}{4}\text{sh}^4 t$

Réponse 2 $\frac{\pi}{2}$

Réponse 3 $\frac{1}{2\cos^2(x)}$

Réponse 4 $\frac{1}{2}\sin^2 x$

Réponse 5 $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)$

Réponse 6 $1-2\ln(2)$

Réponse 7 $1-2\ln(2)$

Réponse 8 $\frac{e^\pi+1}{2}$

Réponse 9 $(x+1)\text{sh}x-\text{ch}x$

Réponse 10 $t\arcsin^2 t+2\arcsin t\sqrt{1-t^2}-2t$.

Réponse 11

1. $I_n=\int_0^1 e^t t^n\,\mathrm{d}t$
2. elle converge vers 0.
3. $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=e$.

Réponse 12 $\ln\sqrt{\left|\frac{1+t}{1-t}\right|}$.

Réponse 13 $\ln\left|\frac{x}{(x-1)^2}\right|$

Réponse 14 $\ln|x|-\ln|x+1|$.

Réponse 15 $\arctan(t+1)$

Réponse 16 $x\mapsto\frac{\lambda e^x+e^{2x}+xe^x+2}{(1-e^x)^2}+,\lambda\in\mathbb{R}$.

Réponse 17 $y_p(x)=e^{\frac{x^2}{2}}e^{\frac{x^2}{2}}=e^{x^2}$

Réponse 18 $x\mapsto(\lambda_i+x)\sin x,\ \lambda_i\in\mathbb{R}$

Réponse 19 $x\mapsto\lambda e^{-x}(1+x^2)+x+1,\lambda\in\mathbb{R}$

Réponse 20 $\{x\mapsto\lambda\cos(x)+\sin(x)\cos(x),\lambda\in\mathbb{R}\}$.

Réponse 21

1. $x\mapsto\frac{x^3}{3}+x\ \left\{x\mapsto\lambda(1+x^2)^{3/2}+\frac{2x^3}{3}+x,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Réponse 22

1. $x\mapsto\frac{1}{2}+\lambda e^x+\mu e^{2x},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
2. $x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{2x}+\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{36}\right)e^{-x},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
3. $x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{2x}+\frac{x^2}{2}e^{2x},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
4. $x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{2x}+\frac{3}{10}\cos(x)+\frac{1}{10}\sin(x),(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Réponse 23

— Si $a=0$, les solutions sont les fonctions $x\mapsto ax+b,(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

— Si $a<0$, les solutions sont les fonctions $x\mapsto\lambda e^{\sqrt{-a}x}+\mu e^{-\sqrt{-a}x},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

— Enfin, si $a>0$, les solutions sont alors les fonctions $x\mapsto\lambda\cos(\sqrt{a}x)+\mu\sin(\sqrt{a}x),(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Réponse 24 $x\mapsto-\frac{3}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x\lambda e^x+\mu e^{-2x},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Réponse 25 $x\mapsto\frac{\alpha(1-x^2)}{1+x^2}+\frac{2\beta x}{1+x^2},(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Réponse 26 $x\mapsto\frac{1}{9}x^2+\frac{x}{2}+1+\frac{(\alpha\ln x+\beta)}{x},(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Réponse 27

1. $az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t)=0$.
2. Si on note S l'ensemble des solutions de cette équation à coefficients constants, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $\{z(\ln x),z\in S\}$ et y solution sur $\mathbb{R}^{-*}$ si et seulement si $x\mapsto y(-x)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. On applique ce qu'on vient de faire à $x^2y''-xy'+y=0$. D'après ce qui précède, y est une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution de l'équation $z''-2z'+z=0$. Les solutions sont les fonctions
$$t\mapsto(\alpha t+\beta)e^t,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$
On en déduit que les solutions de l'équation, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ sont :
$$x\mapsto(\alpha\ln|x|+\beta)x,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

Réponse 28 $x \mapsto \mu e^{x/\mu^2}, \mu \in \mathbb{R}$.

Réponse 29 $x \mapsto \dfrac{m}{\sqrt{m^2+2}} \sin\left(2mx\sqrt{m^2+2}\right) + \cos(mx) - 2m\sin(mx)$

Réponse 30

1. $x \mapsto \sqrt{x}\left(\alpha \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. $x \mapsto \beta\sqrt{x}\left(\sqrt{3} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Réponse 31 $\dfrac{\pi}{4}$

Réponse 32 $\frac{1}{2}$

Réponse 33 $\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$

Réponse 34 $\dfrac{1}{4}\sin^4 t$.

Réponse 35 $\dfrac{2\sin^2 t - 1}{4\sin^4 t}$.

Réponse 36 $\dfrac{1}{3}\sin^3 t - \dfrac{1}{5}\sin^5 t$

Réponse 37 π

Réponse 38 $2 - 4\ln(3) + 4\ln(2)$

Réponse 39 $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\ln|1+2x|$.

Réponse 40 $-2\ln|e^t - 1| + t$.

Réponse 41 $\dfrac{x^2}{2}\arctan x + \dfrac{1}{2}\arctan x - \dfrac{x}{2}$.

Réponse 42 $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

Réponse 43 $t - \arctan(t) + \ln(1+t^2)$

Réponse 44 $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right|$.

Réponse 45 $-\dfrac{1}{x-2}$

Réponse 46 $\dfrac{\arctan(t/\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$.

Réponse 47 $t \mapsto \lambda e^t - (t^2 + 2t + 2), \lambda \in \mathbb{R}$.

Réponse 48 $x \mapsto \lambda\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$

Réponse 49 $x \mapsto \dfrac{\lambda x}{(x-1)^2} + \frac{x}{2}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Réponse 50 $x \mapsto \dfrac{\lambda x}{(x-1)^2} + \frac{x}{2}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Réponse 51 Les solutions sur I_i sont alors : $x \mapsto \dfrac{\lambda_i x}{\sqrt{1+x^2}}, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Réponse 52 Les solutions sur I_i sont $x \mapsto \dfrac{\lambda_i + \sin(x)}{x}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Réponse 53 $x \mapsto \dfrac{1+x}{\cos(x)}$.

Réponse 54

1. $x \mapsto 1 + e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. $x \mapsto \dfrac{1}{3}(x+1)e^{-2x} + e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
3. $x \mapsto x^2 + x + 1 + e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
4. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{3}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^{-x/2} + e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse 55 $x \mapsto x - \dfrac{2}{5} + e^{-x}\left(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse 57 $x \mapsto -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{4x}{9} - \dfrac{14}{27} + \lambda e^x + \mu e^{-3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse 58 $x \mapsto \dfrac{2}{5}\cos x - \dfrac{1}{5}\sin x + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse 59 $x \mapsto \left(x - \dfrac{3}{2}\right)e^x + \lambda + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse 60 1. $x \mapsto \dfrac{(a\ln x + b)}{x},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2. $\dfrac{x^2}{3} + x + 1$

3. $x \mapsto \dfrac{(a\ln x + b)}{x} + \dfrac{x^2}{3} + x + 1,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse 61 1.

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$$

2.

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-(2k+1)} \frac{(2p)!}{(2p-(2k+1))!} + (-1)^p (2p)! I_0,$$

et

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2k} \frac{(2p+1)!}{(2p-2k)!} + (-1)^p (2p+1)! I_1,$$

avec $I_0 = I_1 = 1$.

Réponse 62 1. $I(p,q) = \dfrac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$

2. $I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{p+k+1}\binom{q}{k} = I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Réponse 63 $x \mapsto \dfrac{\lambda_i x^2 + x^2 \ln|x|}{x^2-1}, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Réponse 64 $x \mapsto \frac{1}{x}(a\cos(\sqrt{3}\ln x) + b\sin(\sqrt{3}\ln x)) + x(\ln x - \frac{4}{7}), (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse 65 $x \mapsto 3x - \dfrac{6x}{1+6\lambda e^{-3x^2}}$ avec $\lambda \in \left]-\dfrac{1}{6}, +\infty\right[$.

Réponse 66 $y : x \mapsto \begin{cases} \left(\dfrac{x-c}{2}\right)^2 & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Réponse 67 $x \mapsto \cosh(ax), \alpha > 0$ et $x \mapsto \cos(ax)$, avec $a > 0$.