

Devoir surveillé 2.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1. 1. Étude d'une application auxiliaire

Soit

$$d : \begin{cases}]-1; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto e^{\frac{x}{x+1}} \end{cases}$$

- Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) < e$.
- Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
- Calculer la fonction dérivée d' . En déduire les variations de d .
- Déterminer l'image de d .
- L'application d est-elle injective? surjective?
- Déterminer $d^{-1}([1, \sqrt{e}])$

2. Étude de l'application f

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application

$$f : \begin{cases}]-1; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}} \end{cases}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x - e + 1$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. Préciser la position relative de (D) et (C) .
- Pour $x \in]-1; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
 - Vérifier que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}$.
 - Dresser le tableau de variation de f' .
(On admettra que $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$)
 - Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet, sur $] -1; +\infty[$, exactement deux solutions dont l'une est 0.

Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle.

- Montrer que $f(\alpha) = -\alpha(\alpha + 1)$.
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Déterminer l'image de f .
- La fonction f est-elle injective? surjective?
- Montrer que f induit une bijection entre deux intervalles ouverts non vides que l'on précisera.
- Déterminer $f([0, 1])$.

3. Prolongement de la fonction f en -1

On considère l'application g définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x) \text{ pour tout } x > -1 \end{cases}$$

On appelle (C') la courbe représentative de la fonction g dans le repère orthonormé.

(a) i. Montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} \right).$$

ii. Pour $x \in]-1; +\infty[$, déterminer la limite, lorsque x tend vers -1 , de $\frac{x}{x+1}$ puis de $\left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} \right)$.

iii. En déduire que g est dérivable en -1 , et préciser $g'(-1)$.

(b) Donner une équation de la tangente à (C') en chacun des points d'abscisses -1 , α et 0 .

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif est de calculer les sommes $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

On pose le nombre complexe $z_n = (1+i)^{2n}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z_n .
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer z_n en fonction de S_n et T_n .
3. Déduire des questions précédentes la valeur des sommes S_n et T_n . On pourra distinguer les cas n pair et n impair.

Exercice 3. On définit les applications s et p de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s(n) = n+1 \text{ et } p(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, p(n) = n-1.$$

1. (a) Déterminer $s \circ p$ et $p \circ s$.
(b) Identifier $p^{-1}(\{0\})$ et $s^{-1}(\{0\})$.
(c) s , p , $s \circ p$ et $p \circ s$ sont-elles injectives? surjectives?
(d) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $p^{-1}([0, n])$ et $s^{-1}([0, n])$.
2. (a) Montrer que si f et g sont deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et A est une partie de $\mathbb{N}$, alors :

$$(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A)).$$

(b) On définit une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$z_0 = Id_{\mathbb{N}} \text{ (identité de } \mathbb{N}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = s \circ z_n \circ p.$$

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a

$$z_n^{-1}(\{q\}) = \begin{cases} \{q\} & \text{si } q > n \\ [0, n] & \text{si } q = n \\ \emptyset & \text{si } q < n. \end{cases}$$

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1}$.

2. Montrer que pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $k < n$, on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

3. On rappelle que si $b > a$, $\binom{a}{b} = 0$. La relation précédente reste-t-elle vraie pour (n, k) entiers quelconques?

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1}$ et retrouver le résultat de la question 1.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$. En faisant apparaître une somme télescopique, montrer que

$$\sum_{j=0}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

6. Calculer U_0, U_1, U_2 et U_3 .

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Simplifier $\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}$ et $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Montrer :

$$\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}$$

9. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+2)(U_n - 1) - (2n+2)\left(U_{n+1} - \frac{1}{n+1} - 1\right) = -n$.

10. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression simplifiée de U_{n+1} en fonction de n et U_n .

11. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}.$$

Correction du DS n 2

Je le redis ici, vos résultats doivent être encadrés ou soulignés ou surlignés, bref, mis en valeur. Si vous vous rendez compte que vous vous êtes trompés, vous barrez proprement (à la règle). Les longues fractions et les tableaux de variations doivent être également tracés à la règle. On fait des phrases en français correct et on numérote correctement la question à laquelle on répond. On pense également à numéroter ses copies 1/n avec n le nombre total de pages.

Correction 1 Ce qui ressort de cet exercice (et de l'exercice 4!) c'est que vous ne lisez pas l'énoncé!.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit

$$d: \begin{cases}]-1; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{x}{x+1}} \end{cases}$$

- (a) Si $x > -1$ on a : $x+1 > 0$, $x+1$ est défini et $\frac{x}{x+1} < 1$.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante : $e^{\frac{x}{x+1}} < e$ et l'exponentielle étant toujours strictement positive, on a $0 < e^{\frac{x}{x+1}} < e$.

On peut aussi raisonner par équivalence pour la deuxième partie : Soit $x > -1$, alors $e^{\frac{x}{x+1}} < e \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq x+1$ car $x+1 > 0$. La dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi.

J'ai été plutôt agréablement surprise par la rédaction de cette question. La plupart des raisonnements par équivalence ont été rédigés correctement (well done!) et vous avez, notamment, pensé à conclure!

Attention à ne pas appliquer $\ln$ à 0!!

- (b) On a $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$: $\lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - \frac{1}{x+1} = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$, d'où : $\lim_{x \rightarrow -1^+} d(x) = 0$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x+1} = 1$ et $\lim_{u \rightarrow 1} e^u = e$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = e$.

- (c) $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est une fonction rationnelle, dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{-1\}$, donc sur $] -1; +\infty[$. La fonction exp étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la composée d est dérivable sur $] -1; +\infty[$.

$$\forall x \in] -1; +\infty[: d'(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \times \frac{1}{(x+1)^2}, \text{ d'où } d'(x) > 0.$$

On en déduit le tableau de variation de d :

x	-1	$+\infty$
$d'(x)$		+
d	0	e

- (d) D'après le tableau de variations, on a $\text{Im}(d) =]0, e[$.

Pensez à bien exclure les valeurs des limites qui ne sont jamais atteintes.

- (e) L'application est strictement croissante donc injective. Elle n'est pas surjective car $\text{Im}(d) \neq \mathbb{R}^+$.

- (f) d est strictement croissante et $d(1) = \sqrt{e}$ donc $d(x) \leq \sqrt{e} \Leftrightarrow x \leq 1$. On a donc $d^{-1}(]-1, \sqrt{e}[) =]-1, 1[$.

il était inutile de calculer une expression de la bijection réciproque (d'autant que d n'est PAS bijective). Une fois que vous avez remarqué que $d(1) = \sqrt{e}$, il faut invoquer la stricte croissance de la fonction pour justifier que l'intervalle recherché est bien $] -1, 1]$.

2. Étude de la fonction f

Soit f définie par $f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}$.

(a) i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$.

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - e + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e - e^{\frac{x}{x+1}} = 0$.

On en déduit que la droite (D) d'équation : $y = x - e + 1$ est asymptote à la courbe (C) .

Précisons la position relative de (D) et de (C) :

$$f(x) - (x - e + 1) = e - e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \text{ d'après 1.}$$

Donc (C) est toujours au-dessus de (D) .

Une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote au graphe d'une fonction si la différence $f(x) - (ax + b)$ tend vers 0.

(b) i. $\forall x \in] -1; +\infty[, f'(x) = 1 - d'(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} e^{\frac{x}{x+1}}$.

$$\text{D'où : } f''(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \left[-\frac{1}{(1+x)^4} + \frac{2}{(1+x)^3} \right] = \frac{-1 + 2 + 2x}{(1+x)^4} e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{2x+1}{(1+x)^4} e^{\frac{x}{x+1}}.$$

$$f''(x) \text{ a le signe de } 2x+1, \text{ d'où : } \begin{cases} \forall x \in \left] -1, -\frac{1}{2} \right[, f''(x) < 0 \\ \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[, f''(x) \geq 0 \end{cases}.$$

ii. D'où le sens de variation de f' . On a $f'(0) = 0$, et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{4}{e} = \frac{e-4}{e} < 0$ car $e < 3$. On a admis que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$.

iii. La fonction f' est continue et $f'\left(\left]-1, -\frac{1}{2}\right[\right) = \left] 1 - \frac{4}{e}, 1 \right[$. On a $0 \in \left] 1 - \frac{4}{e}, 1 \right[$ donc 0 admet un antécédent par f' dans $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$. La fonction f' étant strictement décroissante sur $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$, cet antécédent est unique : il existe donc un unique réel α de $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

De même, f' est continue et $f'(\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]) = \left] 1 - \frac{4}{e}; 1 \right[$ donc 0 admet un antécédent par f' dans $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. La fonction f' étant strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, cet antécédent est unique. Or $f'(0) = 0$ et $0 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, cet antécédent vaut donc 0.

On a donc prouvé que $f'(x) = 0$ admet sur $] -1; +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0 et l'autre α .

Je ne veux pas que vous me disiez tout ce que vous savez sur f' dans le désordre pour en conclure " $f'(x) = 0$ admet donc une unique solution". L'objectif est de convaincre l'examineur que vous avez compris le mécanisme en jeu donc on justifie ce qui permet d'affirmer l'existence puis l'unicité. Très peu m'ont justifié que 0 appartenait bien à $1 - \frac{4}{e}$ (vous êtes-vous posé la question?). Par ailleurs, quand vous me dites que f est continue, êtes-vous capable de me dire où ça intervient?

(c) i. On sait que : $f'(\alpha) = 0 \iff 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^2} e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = 0 \iff e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = (\alpha+1)^2$.

$$\text{D'où : } f(\alpha) = \alpha + 1 - e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = \alpha + 1 - (\alpha+1)^2 = (1+\alpha)(1-\alpha-1) = -\alpha(\alpha+1).$$

ii. Étudions les variations de f . On connaît maintenant le signe de f' :

$$\begin{cases} \forall x \in]-1; \alpha[, f'(x) > 0 \text{ et } f \text{ est croissante sur }]-1; \alpha[. \\ \forall x \in [\alpha; 0[, f'(x) \leq 0 \text{ et } f \text{ est décroissante sur } [\alpha; 0[. \\ \forall x \in [0; +\infty[, f'(x) \geq 0 \text{ et } f \text{ est croissante sur } [0; +\infty[\end{cases} \quad \text{On a :}$$

x	-1	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	0	$-\alpha(\alpha+1)$	0	$+\infty$	

(d) D'après le tableau de variations de f , $\text{Im}(f) = [0, +\infty[$.

(e) f n'est pas injective. En effet, si on pose $b = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{2}$, alors par continuité de f , $b \in f(] \alpha, 0[)$ et $b \in f([0, +\infty[)$ donc b admet au moins deux antécédents distincts par f . Elle n'est pas surjective car son image vaut $\mathbb{R}^+$ et non pas $\mathbb{R}$.

Je vous rappelle que "continue et non monotone implique non injective" est un résultat hors programme, vous n'avez pas le droit de l'utiliser. Me dire qu'elle est non injective car "il existe des éléments qui ont deux antécédents distincts" revient à me dire "elle est non injective car non injective" : donnez moi un exemple d'éléments admettant deux antécédents distincts!

(f) f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ donc f induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Attention à bien me justifier la bijection induite. Me dire $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$ ne suffit pas.

(g) $f([0, 1]) = [0, 2 - \sqrt{e}]$ car f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Là encore, la stricte croissance est nécessaire pour justifier.

3. Prolongement de la fonction f en -1 .

g est définie sur $] -1; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x) \text{ pour tout } x > -1 \end{cases}$.

(a) i. $\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \frac{x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1} e^{\frac{x}{x+1}} = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} \right).$

ii. On a $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$. Or $\lim_{u \rightarrow -\infty} u e^u = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} \right) = 0$.

iii. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1$. Cela signifie que g est dérivable en -1 et que $g'(-1) = 1$.

Ne me parlez pas de $g'(-1)$ avant d'avoir justifié que g était dérivable en -1 et donc, que $g'(-1)$ existait bien.

(b) Précisons les tangentes à (C') aux points d'abscisses $-1, \alpha, 0$.

Équation de la tangente à (C') au point d'abscisse -1 :

$$y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1) \\ \iff y = x + 1$$

Équation de la tangente à (C') au point d'abscisse α :

$$y = g'(\alpha)(x - \alpha) + g(\alpha) \iff y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) \\ \iff y = -\alpha(\alpha + 1)$$

Équation de la tangente à (C') au point d'abscisse 0 :

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0) \iff y = f'(0)x + f(0) \iff y = 1$$

Correction 2 1. On a $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc $z^{2n} = 2^n e^{\frac{in\pi}{2}}$.

2. On écrit la formule du binôme de Newton pour $(1 + i)^{2n}$:

$$\begin{aligned}(1 + i)^{2n} &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} i^k \\&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \binom{2n}{k} i^k + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \binom{2n}{k} i^k \\&= \sum_{j=1}^n \binom{2n}{2j} (-1)^j + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{2j+1} i \cdot (-1)^j \\&= S_n + iT_n\end{aligned}$$

Bon, là c'était un florilège de bêtises, notamment de $j = \frac{k}{2}$ alors que k n'est pas pair ou bien $j = 2k$ et j varie de 0 à $2n$ (donc prend TOUTES les valeurs entre 0 et $2n$ et pas seulement les paires).

3. On a $z^{2n} = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right)$ donc, en identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\begin{cases} S_n = 2^n \cos \frac{n\pi}{2} \\ T_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{2} \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} S_{2m} = 2^{2m} (-1)^m \\ T_{2m} = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} S_{2m+1} = 0 \\ T_{2m+1} = 2^{2m+1} (-1)^m \end{cases}$$

Correction 3 1. (a) — Si $n = 0$, $s \circ p(0) = s(0) = 1$.

— Si $n > 0$, $s \circ p(n) = s(n-1) = n$.

donc $s \circ p(n) = \begin{cases} n & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $p \circ s(n) = p(n+1) = n$ donc $p \circ s = id_{\mathbb{N}}$.

J'ai vu beaucoup de $s \circ p = n$ ce qui signifie que la fonction $s \circ p$ est constante, égale à n . Ce n'est pas du tout ce que vous vouliez écrire.

(b) On a $p^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}$ et $s^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Là encore, beaucoup de bêtises, notamment des égalité entre ensemble et entier (!!!).

(c) — L'application s n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par s , elle est injective.

— L'application p n'est pas injective car 0 et 1 ont même image. Elle est surjective car $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n+1) = n$.

— L'application $s \circ p$ est non injective car 0 et 1 ont même image par $s \circ p$. Elle est non surjective car 0 n'admet pas d'antécédent.

— L'application $p \circ s$ est bijective car tout élément n admet un unique antécédente, à savoir lui-même.

Certains m'ont dit que $s \circ p$ ne pouvait pas être surjective sinon s le serait, bravo à eux. Certains m'ont dit que s était strictement croissante (vraie) et continue (faux). La fonction s est à valeurs entières donc on lève clairement le crayon en traçant son graphe! Pour rappel, strictement monotone implique injective SANS hypothèse de continuité!!

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que pour tout $m \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $p(m) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc

$$\llbracket 0, n+1 \rrbracket \subset p^{-1}(\llbracket 0, n \rrbracket).$$

Réciproquement, si $m \in p^{-1}(\llbracket 0, n \rrbracket)$, alors $p(m) \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Or $p(m) = m-1$ si $m \neq 0$ et $p(0) = 0$. Si $m \neq 0$, $m-1 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ implique $m \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Si $m = 0$, alors $m \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. Dans les deux cas, $m \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, on a donc

$$p^{-1}(\llbracket 0, n \rrbracket) = \llbracket 0, n+1 \rrbracket$$

par double inclusion.

De même, pour tout $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $s(m) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc $\llbracket 0, n-1 \rrbracket \subset s^{-1}(\llbracket 0, n \rrbracket)$. Réciproquement, si $m \in s^{-1}(\llbracket 0, n \rrbracket)$, alors $s(m) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc $m+1 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ce qui implique $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Par double inclusion, on a

$$s^{-1}(\llbracket 0, n \rrbracket) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Bon, là j'ai lâché l'affaire et accepté sans justification.

2. (a) Soient f et g sont deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et A est une partie de $\mathbb{N}$. On procède par double inclusion. Soit $x \in (f \circ g)^{-1}(A)$, alors $f \circ g(x) \in A$. On a donc $g(x) \in f^{-1}(A)$ donc $x \in g^{-1}(f^{-1}(A))$. On a montré l'inclusion

$$(f \circ g)^{-1}(A) \subset g^{-1}(f^{-1}(A)).$$

Soit maintenant $x \in g^{-1}(f^{-1}(A))$. Alors $g(x) \in f^{-1}(A)$ donc $f \circ g(x) \in A$. On a donc bien $x \in (f \circ g)^{-1}(A)$.

Par double inclusion, on a montré l'égalité :

$$(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A)).$$

- (b) On définit une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$z_0 = Id_{\mathbb{N}} \text{ (identité de } \mathbb{N} \text{) et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = s \circ z_n \circ p.$$

On va raisonner par récurrence sur n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$HR(n) : \forall q \in \mathbb{N}, z_n^{-1}(\{q\}) = \begin{cases} \{q\} & \text{si } q > n \\ \llbracket 0, n \rrbracket & \text{si } q = n \\ \emptyset & \text{si } q < n. \end{cases}$$

Pour $n = 0$, on a $z_0^{-1}(\{q\}) = \{q\}$. En remarquant que $\{0\} = \llbracket 0, 0 \rrbracket$, la propriété est vraie au rang 0.

On suppose le résultat vrai pour un entier n .

Soit $q \in \mathbb{N}$.

- Si $q > n+1$, alors $q > 0$ donc $s^{-1}(\{q\}) = \{q-1\}$ et $q-1 > n$ donc $z_n^{-1}(s^{-1}(\{q\})) = \{q-1\}$ par hypothèse de récurrence. Enfin, $p^{-1}(\{q-1\}) = \{q\}$. On a donc $p^{-1}(z_n^{-1}(s^{-1}(\{q\}))) = \{q\}$ donc

$$(s \circ z_n \circ p)^{-1}(\{q\}) = \{q\},$$

en utilisant la question précédente.

- Si $q = n+1$, alors $q > 0$ donc $s^{-1}(\{q\}) = \{q-1\} = \{n\}$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $z_n^{-1}(\{n\}) = \llbracket 0, n \rrbracket$. On en déduit que

$$z_{n+1}^{-1}(\{n+1\}) = p^{-1}(\llbracket 0, n \rrbracket) = \llbracket 0, n+1 \rrbracket,$$

en utilisant la question 1d.

- Si $q < n+1$, on procède par disjonction de cas :

- Si $q < n$, alors $s^{-1}(\{q\}) = \emptyset$ par hypothèse de récurrence, donc $z_{n+1}^{-1}(\{q\}) = \emptyset$.
- Si $q = n$, alors $s^{-1}(\{n\}) = \{n-1\}$ si $n \neq 0$, $\emptyset$ sinon. Dans les deux cas, $z_n^{-1}(s^{-1}(\{n\})) = \emptyset$ par hypothèse de récurrence et on a bien

$$z_{n-1}(\{q\}) = \emptyset$$

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n .

Correction 4 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $j = k+1$, on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = 2^{n+1} - 1.$$

Le changement d'indices dans les sommes pose encore problème à certains, il faut que vous soyez à l'aise là dessus.

2. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$, on a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \text{ car } (k+1)! = (k+1).k! \text{ et } (n-k)! = (n-k).(n-k-1)! \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \text{ car } n-k = (n+1) - (k+1) \end{aligned}$$

Oh, une démo de cours! qui a fait le produit des dénominateurs?

3. Soit $k \geq n$.

- Si $k = n$, alors $\binom{n}{k} = 1 = \binom{n+1}{k+1}$ et $\binom{n}{k+1} = 0$, la relation est donc bien vraie.
- Si $k > n$, alors $k+1 > n+1$ et $k+1 > n$ donc les trois termes sont nuls et on a, à nouveau, l'égalité.

Vous avez souvent oublié de traiter $k = n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} + \binom{n}{n+1} - \binom{n}{0} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} = 2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

On retrouve bien le résultat de la question 1.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors

$$\binom{j}{k} = \binom{j+1}{k+1} - \binom{j}{k+1},$$

on a donc

$$\sum_{j=0}^n \binom{j}{k} = \sum_{j=0}^n \left(\binom{j+1}{k+1} - \binom{j}{k+1} \right) = \binom{n+1}{k+1} - \binom{0}{k+1}$$

car on reconnaît une somme télescopique. On a donc bien

$$\sum_{j=0}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Alors là, je dois avouer que vous vous en êtes bien sortis!

$$6. U_0 = \frac{1}{\binom{0}{0}} = 1, U_1 = \frac{1}{\binom{1}{0}} + \frac{1}{\binom{1}{1}} = 2, U_2 = \frac{1}{\binom{2}{0}} + \frac{1}{\binom{2}{1}} + \frac{1}{\binom{2}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2} \text{ et } U_3 = \frac{1}{\binom{3}{0}} + \frac{1}{\binom{3}{1}} + \frac{1}{\binom{3}{2}} + \frac{1}{\binom{3}{3}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{8}{3}.$$

Là c'était pour vous donner des points et voir si vous aviez compris la définition de U_n (et si vous connaissiez les valeurs des premiers coefficients binomiaux)

7. On a

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{\overbrace{(n+1)!}^{=(n+1) \cdot n!}}{k! \underbrace{(n-k+1)!}_{=(n-k+1) \cdot (n-k)!}} = \boxed{\frac{n+1}{n-k+1}}$$

et

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{\overbrace{n! k!}^{=(n-k) \cdot (n-k-1)!}}{\underbrace{(k+1)!}_{=(k+1) \cdot k!} (n-k+1)! n!} = \boxed{\frac{n-k}{k+1}}$$

8. La question précédente permet d'exprimer $\binom{n}{k+1}$ et $\binom{n+1}{k}$ en fonction de $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k}$$

On a donc d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} &= \frac{k+1}{\binom{n}{k}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{2k-n}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} &= \frac{1}{\binom{n}{k}} \left((n+2) - (2n+2) \frac{n-k+1}{n+1} \right) \\ &= \frac{n+2-2(n-k+1)}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{2k-n}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

Les deux quantités sont donc bien égales.

Certains ont raisonné par équivalence, ce qui est tout à fait correct.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}$$

On somme ces égalités pour k variant de 0 à $n-1$:

$$(n+2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} - (2n+2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \right)$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} - 1 = U_n - 1$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \frac{1}{n+1} - 1 = U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1}$$

on a donc

$$(n+2)(U_n - 1) - (2n+2) \left(U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-(k+1)-1}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \right)$$

On reconnaît une somme télescopique dans le membre de droite, d'où :

$$(n+2)(U_n - 1) - (2n+2) \left(U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{\binom{n}{n}} - \frac{n+1}{\binom{n}{0}} = -n$$

On a bien l'égalité souhaitée.

Certains ont raisonné par équivalence et sont tombés sur une somme télescopique.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(n+2)(U_n - 1) - (2n+2) \left(U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} \right) = -n$$

donc

$$(2n+2) \left(U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} \right) = (n+2)(U_n - 1) + n,$$

puis

$$U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{2n+2} (U_n - 1) + \frac{n}{2n+2},$$

et enfin

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{n+2}{2n+2} (U_n - 1) + \frac{n}{2n+2} = \boxed{\frac{n+2}{2n+2} U_n + 1}$$

11. Nous allons montrer l'égalité par récurrence. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\mathcal{H}(n) : " U_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} "$$

— Initialisation : $U_1 = \frac{1}{\binom{1}{0}} + \frac{1}{\binom{1}{1}} = 1 + 1 = 2$ et

$$\frac{2}{4} \sum_{k=1}^2 \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2^2}{2} \right) = 2$$

donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

— Hérédité : soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{H}(n)$. On a alors

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \left(\frac{n+2}{2n+2} \cdot U_n \right) + 1 \\ &= \frac{n+2}{2n+2} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} + 1 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} + 1 \\ &= \frac{n+2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+2}}{n+2} \right) \\ &= \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{2^k}{k} \end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{H}(n+1)$.

— Conclusion : $\forall n \geq 1$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.