Lycée du Parc
PCSI 842
DS 3

Année 2025-2026
Durée : 4h

Devoir surveillé 3.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1. On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$.

1. (a) Sur quel intervalle la fonction f est-elle définie ?
   (b) Déterminer un DL en $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x\sqrt{x})$ de $f(x)$ en 0.
   (c) Donner un équivalent en 0 de f.
   (d) Déterminer la limite en 0^+ de $\dfrac{f(x)}{x}$.
   (e) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ?
   (f) Dresser le tableau de variation de f .
   (g) Tracer l'allure du graphe de f. On fera apparaître les tangentes connues.
2. (a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0,1]$ vers l'intervalle $[0,\frac{1}{\sqrt{e}}]$. On note φ l'application réciproque correspondante.
   (b) Dresser le tableau de variation de φ.
   (c) Justifier que φ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$.
   (e) Déterminer un équivalent de φ en 0.
3. (a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ vers l'intervalle $\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$. On note ψ la bijection réciproque correspondante.
   (b) Dresser le tableau de variation de ψ. On déterminera les limites de ψ aux bornes.
   (c) Déterminer un équivalent simple de ψ au voisinage de 0. On ne cherchera pas à déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
   Indication : On pourra utiliser le fait que $\forall x \in \left]0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$, $f(\psi(x)) = x$.
   (d) On considère l'application composée $g = \varphi\circ\psi^{-1}$ définie de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variation de g.
   (e) Étant donné x dans l'ensemble de départ de g, expliquer comment construire graphiquement $g(x)$ en utilisant uniquement le graphe de f.

Exercice 2. On considère les fonctions définies par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) \end{array} \right. \quad \text{et } a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \end{array} \right. .$$

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de a.
2. Dresser le tableau de variations de a.
3. Quelles sont les solutions de $a(x) = 1$?
4. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer son domaine de dérivabilité.
5. Calculer la dérivée de f. On donnera une expression simplifiée de $f'(x)$.
   On pourra distinguer $x > 1$ et $x < 1$.
6. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$.
7. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\arctan\sqrt{x} \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
8. Redémontrer que $\forall x \in [0,1]$, $\arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = 2\arctan(\sqrt{x})$ en raisonnant par équivalence.
9. Déterminer, avec la méthode de votre choix, une expression simplifiée analogue pour $f(x)$ lorsque $x > 1$.

Exercice 3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \arcsin(3x) - \arccos(2x)$

1. (a) Soit $x \in [-1,1]$, simplifier $\sin\arccos(x)$ et $\cos(\arcsin(x))$ en justifiant rigoureusement.
   (b) Donner, sans démonstration, la relation entre arccos et arcsin.
2. Déterminer l'intervalle de définition I de f.
3. Dresser le tableau de variations de f.
   On exprimera les valeurs aux bornes uniquement à l'aide de arcsin.
4. Montrer que f induit une bijection notée g entre deux intervalles que l'on précisera.
5. Pour tout $x \in I$, calculer et simplifier $\sin\big(f(x)\big)$.
6. Montrer que si $f(x) = t$ alors $x = \pm\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{13 - 12\sin(t)}}$
7. En déduire une expression de g^{-1}.

Exercice 4. Dans tout ce problème, on cherche à déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
(P_1) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, f(xf(y)) = yf(x)$
(P_2) f est bornée sur $[1,+\infty[$: $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geqslant 1, f(x) \leqslant A$.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et g une application de I dans I. On dit que g est une involution de I si $\forall x \in I, g \circ g(x) = x$.
   (a) Donner deux exemples d'involution sur $]0,+\infty[$.
   (b) Une involution de I est-elle bijective sur I ?
2. Soit f une fonction définie de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant (P_1) et (P_2).
   (a) i. Soit $(y,z) \in]0,+\infty[^2$ tel que $f(y) = f(z)$. Démontrer que $yf(1) = zf(1)$.
      ii. Démontrer que $f(1) = 1$.
      On pourra utiliser la question précédente.
      iii. En déduire que f est une involution de $]0,+\infty[$.
   (b) Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$, montrer que $f(ab) = f(a)f(b)$.
   On pourra commencer par justifier l'existence de $y \in]0,+\infty[$ tel que $f(y) = b$.
   (c) On note $F = \{x > 0, f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f.
      i. Démontrer que pour tout $x > 0$, $xf(x) \in F$.
      ii. Montrer que si $(x,y) \in F^2$, alors $xy \in F$ et $\dfrac{1}{x} \in F$.
      iii. Soit $x \in F$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \in F$.
      iv. Montrer que si $x \in F$, alors $x \leqslant 1$.
      On pourra utiliser la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$
      v. Montrer que $F = \{1\}$.
   (d) Déterminer toutes les fonctions définies de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant (P_1) et (P_2).