

TD 7 : Primitives et ED.

1 calcul de primitives "usuelles" et changement de variable

Exercice 1.
Calculer $\int^t \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x \, dx$.

Exercice 2.
Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 3.
Calculer $\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} \, dt$.

Exercice 4.
Calculer $\int^x \cos t \sin t \, dt$.

Exercice 5.
Calculer $\int^x \sin^2(t) \, dt$.

Exercice 6.
Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \, dt$.

Exercice 7.
Calculer $\int^x \frac{dt}{e^t + 1}$.

Exercice 8.
Calculer $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) \, dt$.

2 Calcul de primitives par intégration par parties

Exercice 9.
Calculer $\int^x (t+1) \operatorname{ch} t \, dt$.

Exercice 10.
Calculer $\int^t (\arcsin x)^2 \, dx$

3 Récurrence et intégration par parties

Exercice 11.

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n \, dx$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n e^t \, dt$.
2. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
3. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
4. En déduire la limite de $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$

4 Primitive de fractions rationnelles

Exercice 12.
Calculer $\int^t \frac{dx}{1-x^2}$.

Exercice 13.
Calculer $\int^x \frac{t+1}{t(t-1)} \, dt$.

Exercice 14.
Calculer $\int^x \frac{dt}{t^2+t}$.

Exercice 15.
Calculer $\int^t \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

5 Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 16. 
Résoudre $y' + \frac{(e^x+1)}{(e^x-1)} y = \frac{e^x+2}{e^x-1}$.

Exercice 17.

Résoudre $y' - xy = xe^{x^2}$

Exercice 18.
Résoudre $y' - y \frac{1}{\tan x} = \sin(x)$

Exercice 19.
Résoudre $(x^2+1)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$.

Exercice 20.
Résoudre $y' + \tan(x)y + \cos^2(x) = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 21.
Soit $(x^2+1)y' - 3xy = 1$

1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions.

6 Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 22.

Trouver les solutions des équations différentielles suivantes

$$y'' - 3y' + 2y = g_i(x), \quad i = 1 \dots 4 \text{ avec}$$

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $g_1(x) = 1$ | 3. $g_3(x) = (x+1)e^{2x}$ |
| 2. $g_2(x) = (x-1)e^{-x}$ | 4. $g_4(x) = \sin(x)$ |

Exercice 23.
Résoudre $y'' + ay = 0$.

Exercice 24.
Résoudre $y'' + y' - 2y = 2 \sin x$.

7 Équations différentielles avec changement de variable

Exercice 25.

Résoudre $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en effectuant le changement de variable $t = \arctan x$ (c'est-à-dire en posant $z(t) = y(\tan(t))$). On donnera les solutions sous forme de fractions rationnelles.

Exercice 26.

On cherche à résoudre $x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène en effectuant le changement de variable $t = \ln x$ (c'est-à-dire en posant $z(t) = y(e^t)$).
2. En déduire l'ensemble des solutions.

Exercice 27.

Soit (E) l'équation différentielle $ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$ avec a, b, c réels.

1. En posant $z(t) = y(e^t)$, montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
2. En déduire la forme des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.
3. Résoudre ensuite l'équation $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

8 Équations fonctionnelles

Exercice 28.

Déterminer toutes les fonctions dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)f'(x) = 1$.

Exercice 29.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \quad y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparément les cas $m = 0$ et $m \neq 0$).

Exercice 30.

1. Résoudre $x^2 y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le changement de variable $z(t) = y(e^t)$.
2. Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant : $f'(x) = f(\frac{1}{x}), \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$.

9 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 31.

Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

Exercice 32.

Calculer $\int_1^2 \frac{dt}{t^2}$.

Exercice 33.

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt$.

Exercice 34.

Calculer $\int_t^{\sin^3 x} \cos x \, dx$.

Exercice 35.

Calculer $\int_t^{\cos^3 x} \frac{dx}{\sin^5 x}$.

Exercice 36.

Calculer $\int_t^{\sin^2 x} \cos^3 x \, dx$.

Exercice 37.

Calculer $\int_0^{2\pi} \cos^2(t) \, dt$.

Exercice 38.

Calculer $\int_0^1 \frac{2t}{t+2} \, dt$.

Exercice 39.

Calculer $\int_x^{\frac{t}{1+2t}} \frac{t}{1+2t} \, dt$.

Exercice 40.

Calculer $\int_i^{1+e^x} \frac{1+e^x \, dx}{1-e^x}$.

Exercice 41.

Calculer $\int_x^{\arctan t} t \, dt$.

Exercice 42.

$\int_0^1 \arctan t \, dt$.

Exercice 53.

Résoudre $y' - \tan xy = \frac{1}{\cos x}$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, avec $y(0) = 1$.

Exercice 54.

Trouver les solutions de $y'' + y' + y = g(x)$ dans le cas où :

1. $g(x) = 1$

2. $g(x) = xe^{-2x}$

Exercice 43.

Calculer $\int \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} \, dx$.

Exercice 44.

Calculer $\int_x^{\frac{dt}{t^2 - 2t - 3}}$.

Exercice 45.

Calculer $\int_x^{\frac{dt}{t^2 - 4t + 4}}$.

Exercice 46.

Calculer $\int_x^{\frac{dx}{x^2 + 3}}$.

Exercice 47.

Résoudre $x'(t) - x(t) = t^2$.

Exercice 48.

Résoudre $(x^2 + 1)y' + 3xy = 0$.

Exercice 49.

Résoudre $y' + \frac{(x+1)}{x(x-1)}y = \frac{x}{(x-1)}$.

Exercice 50.

Résoudre $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Exercice 51.

Résoudre $y' = \frac{1}{x(1+x^2)}y$.

Exercice 52.

Résoudre $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}$.

Exercice 55.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2y' + 5y = 5x$.

Exercice 56.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $-3y'' - 2y' + y = \cos(x)$.

Exercice 57.

Résoudre $y'' + 2y' - 3y = x^2$.

Exercice 58.

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = \sin x + \cos x$.

Exercice 59.

Résoudre $y'' + y' = 2xe^x$.

Exercice 60.

1. Résoudre l'équation $x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(t) = y(e^t)$.
2. Trouver une solution polynomiale de $x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) = 3x^2 + 4x + 1$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de $x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) = 3x^2 + 4x + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 61.**

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x) dx$$

1. Établir une relation de récurrence.
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Exercice 62.

On considère deux entiers naturels p et q et on pose $I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I(p, q)$ et $I(p+1, q-1)$ lorsque $q \geq 1$.
2. En déduire une expression de $I(p, q)$ en fonction de $p!$, $q!$ et $(p+q+1)!$.
3. Donner une expression factorisée de

$$\sum_{k=0}^q \frac{(-1)^k}{p+k+1} \binom{q}{k}$$

Exercice 63.

Résoudre l'équation $y' + \frac{2}{x(x^2-1)} y = \frac{x}{x^2-1}$.

Exercice 64.

Résoudre l'équation différentielle $x^2 y'' + 3x y' + 4y = 7x \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(t) = y(e^t)$.

Exercice 65.

Résoudre $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en cherchant une solution particulière y_p sous la forme $x \mapsto ax$ et en posant le changement de fonction $y = y_p - \frac{1}{z}$.

Exercice 66.

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = \sqrt{y}$. Soit y une solution différente de la fonction nulle.

1. Montrer que y ne peut être strictement positive.
2. Montrer que si $y(a) = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \leq a, y(x) = 0$.
3. En déduire que l'ensemble des points d'annulation de y est majoré.
4. En déduire la forme de y .

Exercice 67.

Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x et y réels on ait

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Memo

- Comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ?
Résoudre l'équation homogène puis trouver une solution particulière.
- Comment chercher une solution particulière ?
— Essayer des solutions "évidentes" (constante, identité...)
— Chercher une solution particulière sous la même forme que le second membre (cf méthode 1)
— Utiliser la méthode de la variation de la constante : n'oubliez pas de multiplier $\lambda(x)$ par la solution homogène une fois que vous avez déterminé $\lambda(x)$!!
- Comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 ?
Appliquer le cours : si, si, tout est dedans;-)
- Comment résoudre une équation quelconque ?
— Chercher les solutions polynomiales : cela sera alors précisé dans l'énoncé.
— Changer de fonction. Le changement de variable sera donné.
- Comment trouver des fonctions satisfaisant une équation fonctionnelle ?
Se ramener à une équation différentielle, la résoudre et ne pas oublier de vérifier, parmi les solutions de l'équation différentielle, celles qui sont effectivement solution de l'équation fonctionnelle.

Correction du TD n 7

Correction 1 $\int^t \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x \, dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh}^4 t.$

Correction 2 $[\arcsin t]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$

Correction 3 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $-\frac{u'}{u^3}$, on a donc $\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} \, dt = \frac{1}{2 \cos^2(x)}$

Remarque. On peut aussi écrire $\frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} = \frac{\tan(t)}{\cos^2 t}$ qui est de la forme $u' \cdot u$, on a donc $\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} \, dt = \frac{1}{2} \tan^2 x$. Attention, on trouve alors une autre primitive (égale à la précédente à constante près!).

Correction 4 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $u' \cdot u$. On a $\int^x \cos t \sin t \, dt = \frac{1}{2} \sin^2 x$ (ou $-\frac{1}{2} \cos^2 x$).

Correction 5 On écrit $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. On a donc $\int^x \sin^2(t) \, dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x)$.

Correction 6 On écrit :

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{t+1-2}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}.$$

On a donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \, dt = [t - 2 \ln|t+1|]_0^1 = 1 - 2 \ln(2).$$

Correction 7 On écrit $\frac{1}{e^t+1} = \frac{e^t+1-e^t}{e^t+1} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$. Le deuxième terme est de la forme $\frac{u'}{u}$, on a donc $\int^x \frac{dt}{e^t+1} = x - \ln(1+e^x)$.

Correction 8 On pose $u = \ln(t)$, on a $du = \frac{dt}{t}$. Comme t varie de 1 à e^π , u varie de 0 à π . On obtient

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) \, dt = \int_0^\pi e^u \sin(u) \, du = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

Correction 9 $\int^x (t+1) \operatorname{ch} t \, dt = (x+1) \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{sh} t \, dt = (x+1) \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x.$

Correction 10 On fait une double intégration par partie : $\int^t (\arcsin x)^2 \, dx = t \arcsin^2 t + 2 \arcsin t \sqrt{1-t^2} - 2t$.

Correction 11

1. On pose $t = \ln(x)$, on a donc $dt = \frac{1}{x} dx$ donc $dx = e^t dt$. x varie de 1 à e donc t varie de 0 à 1. On a donc

$$I_n = \int_0^1 e^t t^n \, dt$$

2. Pour tout $t \in [0, 1]$, $e^t \in [1, e]$ donc $t^n \leq e^t t^n \leq e \cdot t^n$. Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_0^1 t^n \, dt \leq I_n \leq e \cdot \int_0^1 t^n \, dt$$

donc

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

et la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien convergente par le thm des gendarmes : elle converge vers 0.

3. On fait une intégration par partie, on trouve

$$I_{n+1} = [t^{n+1} e^t]_0^1 - (n+1) \int_0^1 e^t t^n \, dt = e - (n+1) I_n.$$

4. D'après la question précédente, on a $n I_n = -I_{n+1} + e - I_n$. d'après la question 2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = e$.

Correction 12 On écrit $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}$. On en déduit que

$$\int^t \frac{1 dx}{1-x^2} = \int^t \left(\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|1+t| - \frac{1}{2} \ln|1-t| = \ln \sqrt{\left| \frac{1+t}{1-t} \right|}.$$

Correction 13 On écrit :

$$\frac{t+1}{t(1-t)} = \frac{-(t-1)+2t}{t(1-t)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t-1}.$$

On a donc $\int^x \frac{(t+1)dt}{t(1-t)} dt = \ln|x| - \ln|(x-1)^2| = \ln \left| \frac{x}{(x-1)^2} \right|.$

Correction 14 On écrit $\frac{1}{t^2+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ puis on intègre :

$$\int^x \frac{1 dt}{t^2+t} = \ln|x| - \ln|x+1|.$$

Correction 15 On écrit $\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1}$. On a alors $\int^t \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \arctan(t+1).$

Correction 16 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto e^x - 1$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^*$. On travaille sur I_i . On commence par chercher les solutions de l'équation homogène associée. Pour cela, il faut déterminer une primitive de $\frac{1+e^x}{1-e^x}$ ce que l'on a fait à l'exercice 40. On a :

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = -2 \ln|e^x - 1| + x.$$

Les solutions, sur I_i , de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda e^x}{(1-e^x)^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière, on procède par la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{\lambda(x)e^x}{(e^x-1)^2}.$

y_p est solution si et seulement si $(e^x-1) \frac{\lambda'(x)e^x}{(e^x-1)^2} = e^x + 2$ c'est-à-dire :

$$\lambda'(x)e^x = (e^x+2)(e^x-1) = e^{2x} + e^x - 2,$$

soit encore :

$$\lambda'(x) = e^x + 1 - 2e^{-x}.$$

On a donc : $\lambda(x) = e^x + x + 2e^{-x}$ et $y_p(x) = \frac{e^{2x} + xe^x + 2}{(e^x-1)^2}$. Les solutions de l'équation, sur I_i , sont :

$$x \mapsto \frac{\lambda e^x + e^{2x} + xe^x + 2}{(1-e^x)^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Correction 17 On travaille sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{x^2/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Une solution évidente est $x \mapsto e^{x^2}$ donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto e^{x^2} + \lambda e^{x^2/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque. Si on ne voit pas la solution évidente, on peut procéder par la méthode de la variation de la constante et chercher une solution particulière sous la forme $\lambda(x)e^{x^2/2}$. On trouve $\lambda'(x) = xe^{x^2/2}$. On reconnaît une fonction de la forme $u'e^u$ donc $\lambda(x) = e^{x^2/2}$ et une solution particulière est $y_p(x) = e^{x^2/2} e^{x^2/2} = e^{x^2}$.

Correction 18 On travaille sur un intervalle sur lequel $\sin$ ne s'annule pas. On pose $I_i =]i\pi, (i+1)\pi[$, $i \in \mathbb{Z}$. Les solutions de l'équation homogène sur I_i sont $x \mapsto \lambda_i \sin x$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda(x) \sin(x)$. On trouve $\lambda'(x) = 1$ donc $\lambda(x) = x$ et $y_p(x) = x \sin(x)$. Les solutions sur I_i sont donc les fonctions $x \mapsto (\lambda_i + x) \sin x$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Correction 19 On travaille sur $\mathbb{R}$. On écrit $\frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 1 - \frac{2x}{1+x^2}$, une primitive de $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ est donc $x \mapsto x - \ln(1+x^2).$

Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto \lambda e^{-x}(1+x^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y_p(x) = ax + b$. On a y_p solution si et seulement si $a(x^2+1) + (x-1)^2(ax+b) = x^3 - x^2 + x + 1$. En développant et en identifiant les coefficients des deux membres on trouve $y_p(x) = x + 1$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions : $x \mapsto \lambda e^{-x}(1+x^2) + x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 20 On travaille sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda \cos(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, on utilise la

méthode de la variation de la constante. On cherche une solution sous la forme $x \mapsto \lambda(x) \cos(x)$, ce qui implique $\lambda'(x) = \cos(x)$ donc $\lambda(x) = \sin(x)$. Une solution particulière est $x \mapsto \sin(x) \cos(x)$. L'ensemble des solutions est :

$$\{x \mapsto \lambda \cos(x) + \sin(x) \cos(x), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Correction 21

- On cherche une solution polynômiale. Si $a_m x^m$ est le terme dominant du polynôme, on doit avoir $a_m m x^{m-1} x^2 - 3x a_m x^m = 0$ (puisque le second membre est une constante). Cela impose $m = 3$. On cherche maintenant une solution sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$. On dérive et on injecte dans l'équation puis on identifie au polynôme constant égal à 1. On obtient le système :

$$\begin{cases} -b &= 0 \\ 3a - 2c &= 0 \\ 2b - 3d &= 0 \\ c &= 1 \end{cases}.$$

On obtient $b = d = 0$, $c = 1$ et $a = \frac{2}{3}$. Une solution particulière est donc $x \mapsto \frac{x^3}{3} + x$.

- On travaille sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont $\lambda(1 + x^2)^{3/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ x \mapsto \lambda(1 + x^2)^{3/2} + \frac{2x^3}{3} + x, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction 22 L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet 1 et 2 pour racine donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Une solution particulière est $y = \frac{1}{2}$, les solutions sont donc :

$$x \mapsto \frac{1}{2} + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax + b)e^{-x}$. Par identification, on a $6a = 1$, $6b - 5a = -1$. On trouve $a = \frac{1}{6}$ et $b = -\frac{1}{36}$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \left(\frac{x}{6} - \frac{1}{36} \right) e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- On cherche une solution particulière sous la forme $x(ax + b)e^{2x}$. Par identification, on a $2a = 1$ et $2a + b = 1$. On trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- On cherche une solution particulière sous la forme $\alpha \cos x + \beta \sin x$. Par identification, on trouve $\beta + 3\alpha = 1$ et $\alpha - 3\beta = 0$. On a donc $\alpha = \frac{3}{10}$ et $\beta = \frac{1}{10}$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{3}{10} \cos(x) + \frac{1}{10} \sin(x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 23 On procède par disjonction de cas :

- Si $a = 0$, alors $y'' = 0$ et les solutions sont les fonctions affines $x \mapsto ax + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $a < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes $\pm \sqrt{-a}$. Les solutions sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{\sqrt{-a}x} + \mu e^{-\sqrt{-a}x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Enfin, si $a > 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\pm i\sqrt{a}$, les solutions sont alors les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{a}x) + \mu \sin(\sqrt{a}x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 24 L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ admet pour racines 1 et -2. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que z_p est une solution particulière (complexe) de l'équation $z'' + z' - 2z = 2e^{ix}$ si et seulement si sa partie imaginaire y_p est une solution particulière de $y'' + y' - 2y = 2\sin x$. Cherchons une solution particulière de l'équation complexe sous la forme $z_p : x \mapsto \alpha e^{ix}$ puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $z_p'(x) = i\alpha e^{ix}$ et $z_p''(x) = -\alpha e^{ix}$. La fonction z_p est solution de l'équation si et seulement si $(-\alpha + i\alpha - 2\alpha)e^{ix} = 2e^{ix}$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{2}{i-3}$.

Déterminons maintenant la partie imaginaire de la fonction $z_p : x \mapsto \frac{2}{i-3} e^{ix}$. On écrit

$$\frac{2}{i-3} e^{ix} = -\frac{3+i}{5} e^{ix},$$

on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{3}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{3}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x \lambda e^x + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 25 Exprimons les dérivées de $z : t \mapsto y(\tan(t))$ en fonction de celles de y . On a :

$$z' : t \mapsto (1 + \tan^2 t) y'(\tan(t)) \text{ et}$$

$$z'' : t \mapsto (1 + \tan^2 t) y''(\tan(t)) + 2 \tan(t) (1 + \tan^2 t) y'(\tan(t)).$$

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de l'équation } (1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2) y' + 4y = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)^2 y''(x) + 2x(1 + x^2) y'(x) + 4y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, (1 + \tan^2(t))^2 y''(\tan(t)) + 2 \tan(t) (1 + \tan^2(t)) y'(\tan(t)) + 4y(\tan(t)) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, z''(t) + 4z(t) = 0 \text{ d'après les calculs faits ci-dessus} \end{aligned}$$

Réolvons cette équation. Son équation caractéristique admet $\pm 2i$ pour racines donc les solutions sont $z : t \mapsto \alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On sait que z est solution de l'équation $z''(t) + 4z(t) = 0$ si et seulement si $y : x \mapsto z(\arctan(x))$ est solution de $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2) y' + 4y = 0$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \alpha \cos(2 \arctan(x)) + \beta \sin(2 \arctan(x)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On va simplifier leurs expressions. On écrit :

$$\cos(2 \arctan(x)) = 2 \cos^2 \arctan(x) - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \arctan(x)} - 1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

et

$$\sin(2 \arctan(x)) = 2 \sin(\arctan(x)) \cos(\arctan(x)) = 2 \tan(\arctan(x)) \cos^2(\arctan(x)) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\alpha(1 - x^2)}{1 + x^2} + \frac{2\beta x}{1 + x^2}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 26

1. Exprimons les dérivées de $z : t \mapsto y(e^t)$ en fonction de celles de y .

$$\text{On a } z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t).$$

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } x^2 y'' + 3x y' + y = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t} y''(e^t) + 3e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0 \\ \Leftrightarrow & z \text{ est solution de } z'' + 2z' + z = 0 \text{ d'après les calculs faits ci-dessus} \end{aligned}$$

Réolvons $z'' + 2z' + z = 0$. Les solutions sont les fonctions

$$t \mapsto (\alpha t + \beta) e^{-t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On sait que z est solution de $z'' + 2z' + z = 0$ si et seulement si $y : x \mapsto z(\ln x)$ est solution de $x^2 y'' + 3x y' + y = 0$, on en déduit que les solutions de l'équation homogène sont

$$x \mapsto \frac{(\alpha \ln x + \beta)}{x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$ donc y_p est solution si et seulement si $9ax^2 + 4bx + c = x^2 + 2x + 1$. Par unicité des coefficients, on trouve $a = \frac{1}{9}, b = \frac{1}{2}$ et $c = 1$. On en déduit que les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{1}{9} x^2 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{(\alpha \ln x + \beta)}{x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 27

1. On a $z'(t) = e^t y(e^t)$ et $z''(t) = e^{2t} y''(t) + e^t y'(e^t)$. On a donc

$$\begin{aligned} y \text{ solution de E sur } \mathbb{R}^{+*} & \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, a e^{2t} y''(e^t) + b e^t y'(e^t) + c y(e^t) = 0 \\ & \Leftrightarrow a z''(t) + (b - a) z'(t) + c z(t) = 0. \end{aligned}$$

Les solutions de cette dernière équation dépendent du signe du discriminant : $(b - a)^2 - 4ac$.

2. Si on note S l'ensemble des solutions de cette équation à coefficients constants, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $\{z(\ln x), z \in S\}$.

Pour déterminer les solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$, on remarque que $(y(-x))' = -y'(-x)$ et $(y(-x))'' = y''(-x)$. On a donc :

$$a x^2 y''(x) + b x y'(x) + c y(x) = 0 \Leftrightarrow a (-x)^2 (y(-x))'' + (-x) (y(-x))' + c y(-x) = 0.$$

On en déduit que y solution sur $\mathbb{R}^{-*}$ si et seulement si $x \mapsto y(-x)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. On applique ce qu'on vient de faire à $x^2 y'' - xy' + y = 0$. D'après ce qui précède, y est une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution de l'équation $z'' - 2z' + z = 0$. Les solutions sont les fonctions

$$t \mapsto (\alpha t + \beta)e^t, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de l'équation, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ sont :

$$x \mapsto (\alpha \ln|x| + \beta)x, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 28 Soit f une solution. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)f'(x) = 1$, f et f' ne s'annulent pas. On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{f(-x)}$ donc f' est dérivable. On peut dériver l'équation fonctionnelle :

$$-f'(-x)f'(x) + f(-x)f''(x) = 0,$$

se qui se réécrit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f''(x)}{f'(x)},$$

$$\text{car } f'(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

On intègre l'égalité $\frac{f'}{f} = \frac{f''}{f'}$, on obtient l'existence d'un réel K tel que :

$$\ln|f'(x)| = \ln|f(x)| + K.$$

On sait que f et f' ne s'annulent pas et sont continues, elles sont donc de signes constants. En passant à l'exponentielle et posant $\lambda = \pm e^K$ selon le signe de ff' , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda f(x).$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto \mu e^{\lambda x}$. On doit donc chercher les solutions de l'équation fonctionnelle parmi les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \mu e^{\lambda x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

En injectant dans l'équation, on voit que $f(-x)f'(x) = \lambda \mu^2$. On doit donc avoir $\lambda \mu^2 = 1$, ce qui impose $\lambda = \frac{1}{\mu^2}$.

Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \mu e^{x/\mu^2}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction 29 Pour $m = 0$, on trouve que les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto (ax + b)e^{-x} + 1$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La solution cherchée est $x \mapsto -(x+1)e^{-x} + 1$. Pour $m \neq 0$, on trouve que la solution cherchée est $x \mapsto \frac{m}{\sqrt{m^2+2}} \sin(2mx\sqrt{m^2+2}) + \cos(mx) - 2m \sin(mx)$

Correction 30

1. On pose $z(t) = y(e^t)$, alors y est solution de l'équation ci-dessus si et seulement si z est solution de

$$z'' - z'(t) + z(t) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions :

$$t \mapsto e^{t/2} \left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle sont :

$$x \mapsto \sqrt{x} \left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle. Alors f' est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc dériver l'égalité et On dérive l'égalité, on obtient :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right),$$

c'est-à-dire :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) \Leftrightarrow x^2 f''(x) + f(x) = 0.$$

Comme $x \in \mathbb{R}^{+*}$, cette équation est équivalente à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{2t} y''(e^t) + y(e^t) = 0.$$

On a montré à la question précédente, que les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sqrt{x} \left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons parmi ces solutions, lesquelles vérifient $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \sqrt{x} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2x} \alpha \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\sqrt{3}}{2x} \beta \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right), \end{aligned}$$

et

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x - \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right)$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut donc $\alpha = \sqrt{3}\beta$. On en déduit que les solutions de l'équation fonctionnelle sont les fonctions :

$$x \mapsto \beta \sqrt{x} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right), \beta \in \mathbb{R}.$$

Correction 31 $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$

Correction 32 $\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$

Correction 33 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt = -[\ln(\cos t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right).$

Correction 34 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $u' \cdot u^3$, on a donc :

$$\int^t \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{4} \sin^4 t.$$

Correction 35 On écrit : $\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} = \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin^5 x} = \frac{\cos x}{\sin^5 x} - \frac{\cos x}{\sin^3 x}$. On a donc :

$$\int^t \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^5 x} = \frac{-1}{4 \sin^4 t} + \frac{1}{2 \sin^2 t} = \frac{2 \sin^2 t - 1}{4 \sin^4 t}.$$

Correction 36 On écrit $\sin^2 x \cos^3 x = \sin^2 x \cos x(1-\sin^2 x) = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$. On a alors : $\int^t \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int^t \cos x \sin^2 x \, dx - \int^t \cos x \sin^4 x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 t - \frac{1}{5} \sin^5 t$.

Correction 37 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)+1}{2} \, dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$

Correction 38 On écrit :

$$\frac{2t}{t+2} = \frac{2t+4-4}{t+2} = 2 - \frac{4}{t+2}$$

d'où

$$\int_1^2 \frac{2t}{t+2} \, dt = [2t - 4 \ln|t+2|]_1^2 = 2 - 4 \ln(3) + 4 \ln(2)$$

Correction 39 On écrit $\frac{t}{1+2t} = \frac{(2t+1)-1}{2(1+2t)}$. On a alors :

$$\int^x \frac{t}{1+2t} \, dt = \int^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+2t)} \right) \, dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \ln|1+2x|.$$

Correction 40 On écrit :

$$\int^t \frac{1+e^x \, dx}{1-e^x} = \int_0^t \frac{2e^x+1-e^x}{1-e^x} \, dx = \int_0^t \left(\frac{2e^x}{1-e^x} + 1 \right) \, dx = -2 \ln|e^t-1| + t.$$

Correction 41

$$\int^x t \arctan t \, dt = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int_0^x \frac{t^2}{2(1+t^2)} \, dt = \frac{x^2}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{x}{2}.$$

Correction 42 On fait une intégration par parties avec $u = \arctan t$, $v' = 1$ donc $v = t$ et $u' = \frac{1}{1+t^2}$. On a $\int_0^1 \arctan t = [t \arctan t]_0^1 - \frac{t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Correction 43 On écrit $\frac{x^2+2x}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}$.

On a donc $\int^t \frac{x^2+2x}{x^2+1} \, dx = t - \arctan(t) + \ln(1+t^2)$.

Correction 44 On a $t^2-2t-3 = (t+1)(t-3)$ d'où $\frac{1}{t^2-2t-3} = \frac{1}{4(t-3)} - \frac{1}{4(t+1)}$. On écrit alors

$$\int^x \frac{dt}{t^2-2t-3} = \int^x \frac{dt}{4(t-3)} - \int^x \frac{dt}{4(t+1)} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right|.$$

Correction 45 On a $\frac{1}{t^2-4t+4} = \frac{1}{(t-2)^2}$ d'où $\int \frac{dt}{t^2-4t+4} = -\frac{1}{x-2}$.

Correction 46 On écrit $\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{(x/\sqrt{3})^2+1}$. On pose $u = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $dx = \sqrt{3}du$ donc $\int \frac{1}{x^2+3} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{\arctan(u/\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$.

Correction 47 On travaille sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont $t \mapsto \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous forme polynomiale $y_p : t \mapsto at^2 + bt + c$. On a $y_p'(t) = 2at + b$ donc y_p est solution si et seulement si $2at + b - at^2 - bt - c = t^2$.

On identifie les coefficients des deux membres et on résout le système :
$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

On trouve $y_p : t \mapsto -(t^2 + 2t + 2)$, les solutions de l'équation sont donc $t \mapsto \lambda e^t - (t^2 + 2t + 2), \lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 48 On travaille sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{3x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{3}{2} \ln(1+x^2)$; Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 49

On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x(x-1)$ ne s'annule pas. On pose $I_1 =]-\infty, 0[, I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$. On travaille sur I_i . Pour trouver les solutions de l'équation homogène associée, on doit déterminer une primitive de $\frac{x+1}{x(1-x)}$ ce que l'on a fait à l'exercice 13. On a $\int^x \frac{(t+1)dt}{t(1-t)} = \ln \left| \frac{x}{(x-1)^2} \right|$. On en déduit que les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda x}{(x-1)^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la solution égale à $x \mapsto \frac{x}{2}$ est une solution évidente.

Les solutions, sur I_i , de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\lambda x}{(x-1)^2} + \frac{x}{2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Si on ne voit pas la solution évidente, on peut la trouver par la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{\lambda(x)x}{(x-1)^2}$. La fonction y_p est solution de l'équation si et seulement si $\frac{\lambda'(x)x^2}{x-1} = x^2$ ce qui est vrai lorsque $\lambda(x) = \frac{(x-1)^2}{2}$. On retrouve la solution particulière $x \mapsto \frac{x}{2}$.

Si on intègre $\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$, on va se retrouver avec $y_p(x) = \frac{(x^2-2x)x}{2(x-1)^2}$, ce qui est correct (mais moins joli) puisque l'on a

$$\frac{(x^2-2x)x}{2(x-1)^2} = \frac{(x^2-2x+1)x - x}{2(x-1)^2} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2(x-1)^2},$$

avec $x \mapsto \frac{-x}{2(x-1)^2}$ solution de l'équation homogène.

Correction 50 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^*$; Les solutions de l'équation homogène sur I_i sont $x \mapsto \lambda_i x^2, \lambda_i \in \mathbb{R}$. Une solution évidente est $x \mapsto \frac{x^4}{4}$. Les solutions sur I_i sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda_i x^2 + \frac{x^4}{2}, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Correction 51 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x(1+x^2)$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^*$. On écrit $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(1+x^2)}$ est $x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

Les solutions sur I_i sont alors : $x \mapsto \frac{\lambda_i x}{\sqrt{1+x^2}}, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Correction 52 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^*$. Les solutions de l'équation homogène sur I_i sont $x \mapsto \frac{\lambda_i}{x}, \lambda_i \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \frac{\lambda'(x)}{x}$. On a alors $\lambda'(x) = \cos(x)$ d'où $\lambda(x) = \sin(x)$. Les solutions sur I_i sont $x \mapsto \frac{\lambda_i + \sin(x)}{x}, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Correction 53 On travaille sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto \frac{\lambda}{\cos(x)}, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\cos(x)}$.

On trouve $\lambda'(x) = 1$ donc $\lambda(x) = x$. Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x+\lambda}{\cos(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut $y(0) = 1$, on doit donc prendre $\lambda = 1$ et l'unique solution cherchée est $x \mapsto \frac{1+x}{\cos(x)}$.

Correction 54 Les solutions de l'équation caractéristique sont $-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto e^{-x/2} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Une solution évidente est la solution constante égale à 1, les solutions sont donc :

$$x \mapsto 1 + e^{-x/2} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^{-2x}$. On a $y'_p(x) = (-2ax+a-2b)e^{-2x}$ et $y''_p(x) = (4ax+4b-4a)e^{-2x}$. La fonction y_p est solution de l'équation si et seulement si $(3ax+3b-3a)e^{-2x} = xe^{-2x}$. On résout le système obtenu en identifiant les coefficients et on trouve $a = b = \frac{1}{3}$, les solutions sont donc :

$$x \mapsto \frac{1}{3}(x+1)e^{-2x} + e^{-x/2} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

3. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a $y'_p(x) = 2ax + b$ et $y''_p(x) = 2a$. La fonction y_p est solution de l'équation si et seulement si $ax^2 + (b+2a)x + c + b + 2a = x^2 + 3x + 4$. On identifie les coefficients des deux membres et on trouve $a = b = c = 1$ dont les solutions sont :

$$x \mapsto x^2 + x + 1 + e^{-x/2} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

4. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On remarque qu'une fonction z à valeurs complexes est solution de $z''(x) + z'(x) + z(x) = e^{jx}$ si et seulement si sa partie réelle est solution de $y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. Nous allons donc résoudre l'équation différentielle complexe. On remarque que j est solution de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière sous la forme $z_p(x) = axe^{jx}$. On a $z'_p(x) = (a+jax)e^{jx}$ et $z''_p(x) = (j^2ax+2ja)e^{jx}$. On a :

$$\begin{aligned} z_p''(x) + z'_p(x) + z_p(x) &= e^{jx} \Leftrightarrow (j^2a + ja + a)x + (a + 2ja)e^{jx} = e^{jx} \\ &\Leftrightarrow (a + 2ja)e^{jx} = e^{jx} \text{ car } 1 + j + j^2 = 0 \text{ d'après les propriétés des racines } \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que } a = \frac{1}{1+2j} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

On a donc $z_p(x) = -\frac{i}{\sqrt{3}}e^{jx}$, on en déduit qu'une solution particulière de l'équation

$y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ et les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) e^{-x/2} + e^{-x/2} \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 55 L'équation caractéristique a pour racine $-1 \pm 2i$, les solutions de l'équation homogène sont donc :

$$x \mapsto e^{-x} (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. On trouve $x - \frac{2}{5}$. Les solutions sont donc :

$$x \mapsto x - \frac{2}{5} + e^{-x} (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 56 Les racines de l'équation caractéristique sont -1 et $\frac{1}{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc :

$$x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{x/3}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $\alpha \cos x + \beta \sin x$. On trouve $\alpha = \frac{1}{5}$ et $\beta = -\frac{1}{10}$. Les solutions sont donc :

$$x \mapsto \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x + \alpha e^{-x} + \beta e^{x/3}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut également préférer chercher une solution particulière complexe de l'équation $-3z'' - 2z' + z = e^{ix}$. On cherche z_p sous la forme $z_p(x) = \lambda e^{ix}$, on a z_p solution si et seulement si $(3-2i+1)\lambda = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{4-2i} = \frac{2+i}{10}$ et $z_p(x) = \frac{2+i}{10} e^{ix} = \frac{1}{10} (2 \cos(x) - \sin(x) + i \cos(x) + 2i \sin(x))$ Une solution particulière de $-3y'' - 2y' + y =$

$\cos(x)$ est la partie réelle de $z_p(x)$ soit $y_p = \frac{1}{10}(2\cos(x) - \sin(x))$. On retrouve bien la même solution particulière.

Correction 57 L'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$ donc les racines sont 1 et -3 donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On a $y'_p(x) = 2ax + b$ et $y''_p(x) = 2a$. La fonction y_p est solution si et seulement si

$$-3ax^2 + (4a - 3b)x + 2a + 2b - 3c = x^2$$

ce qui impose $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{9}$ et $c = -\frac{14}{27}$. Les solutions sont donc les fonctions

$$x \mapsto -\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{9} - \frac{14}{27} + \lambda e^x + \mu e^{-3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 58 L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$. On a $y'_p(x) = -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ et $y''_p(x) = -\alpha \cos(x) - \beta \sin(x)$. On a donc y_p solution si et seulement si

$$(\alpha - 3\beta) \cos(x) + (\beta + 3\alpha) \sin(x) = \cos(x) + \sin(x),$$

donc

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

On obtient $\alpha = \frac{2}{5}$ et $\beta = -\frac{1}{5}$. Une solution particulière est donc

$$y_p(x) = \frac{2}{5} \cos(x) - \frac{1}{5} \sin(x).$$

On peut aussi utiliser le principe de superposition pour dire que si z_p est solution de $z'' - 3z' + 2z = e^{ix}$, alors $y_p = \Re e(z_p) + \Im m(z_p)$ est solution de l'équation étudiée.

On cherche donc une solution z_p de $z'' - 3z' + 2z = e^{ix}$ sous la forme λe^{ix} , on a z_p solution si et seulement si $(1 - 3i)\lambda = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{1 - 3i} = \frac{1 + 3i}{10}$. On a alors $z_p(x) = \frac{1 + 3i}{10} e^{ix} = \frac{1}{10}(\cos(x) - 3\sin(x) + 3i\cos(x) + i\sin(x))$. Ainsi,

$$y_p(x) = \frac{1}{10}(\cos(x) - 3\sin(x)) + \frac{1}{10}(3\cos(x) + \sin(x)) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$$

On retrouve bien la même solution particulière.

On en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 59 L'équation caractéristique $r^2 + r = 0$ a pour racines 0 et -1, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda + \mu e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto (ax + b)e^x$. On a $y'_p(x) = (ax + a + b)e^x$ et $y''_p(x) = (ax + 2a + b)e^x$. La fonction y_p est donc solution de l'équation si et seulement si $(3a + 2b + 2ax)e^x = 2xe^x$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$$

On trouve $a = 1$ et $b = -\frac{3}{2}$. Une solution particulière est donc $x \mapsto \left(x - \frac{3}{2}\right)e^x$ et les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto \left(x - \frac{3}{2}\right)e^x + \lambda + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 60

1. On pose $z(t) = y(e^t)$. On a alors :

$$z'(t) = e^t y'(e^t)$$

et

$$z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t).$$

On a :

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow z''(t) + 2z'(t) + z(t) &= 0. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique de :

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$$

est :

$$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

Elle possède une racine double donc les solutions de $z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$t \mapsto (at + b)e^{-t}, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de $x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$x \mapsto (a \ln x + b)e^{-\ln x}, (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

ce qui se réécrit :

$$x \mapsto \frac{(a \ln x + b)}{x}, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Si une solution polynômiale existe, notons ax^n son terme dominant. Le terme dominant de $x^2 y''(x)$ est :

$$n(n-1)ax^{n-2}x^2 = n(n-1)ax^n.$$

Le terme dominant de $3xy'(x)$ est $3nax^n$ et celui de $y(x)$ est ax^n . On doit donc avoir :

$$n(n-1)ax^n + 3nax^n + ax^n = 3x^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} n(n-1) + 3n + 1 &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

il faut donc $n = 2$. On cherche donc une solution polynômiale sous la forme y_p : $x \mapsto ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$. On a :

$$y_p \text{ solution} \Leftrightarrow 9ax^2 + 4bx + c = 3x^2 + 4x + 1.$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = 1. \end{cases}$$

3. D'après les deux questions précédentes, on en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$x \mapsto \frac{(a \ln x + b)}{x} + \frac{x^2}{3} + x + 1, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 61

1. Soit $n \geq 2$, alors en faisant deux intégrations par parties, on trouve

$$I_n = n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$$

Pour $n \geq 4$, on a donc

$$I_n = n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} - n(n-1)n(-2) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)I_{n-4}$$

2. Par récurrence descendante, on obtient :

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2p-(2k+1)} \frac{(2p)!}{(2p-(2k+1))!} + (-1)^p (2p)! I_0,$$

et

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2p-2k} \frac{(2p+1)!}{(2p-2k)!} + (-1)^p (2p+1)! I_1,$$

avec $I_0 = I_1 = 1$.

Correction 62

1. On pose $v'(t) = t^p$ et $u(t) = (1-t)^q$. On a $u'(t) = -q(1-t)^{q-1}$ et $v(t) = \frac{1}{p+1} t^{p+1}$.
On a donc

$$I(p, q) = \left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

2. On a $I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$ donc

$$I(p+1, q-1) = \frac{p+1}{q} I(p, q) = \frac{p+1}{q} \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1),$$

et, par récurrence descendante :

$$I(p+1, q-1) = \frac{p+1}{q} \times \frac{p}{q+1} \times \dots \times \frac{1}{q+p} I(0, q+p).$$

Comme $I(0, q+p) = \int_0^1 (1-t)^{q+p} dt = \left[-\frac{(1-t)^{q+p+1}}{q+p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$, on obtient :

$$I(p+1, q-1) = \frac{p+1}{q} \times \frac{p}{q+1} \times \dots \times \frac{1}{q+p} \times \frac{1}{q+p+1} = \frac{(p+1)!}{\prod_{k=q+1}^{q+p+1} k},$$

donc

$$I(p+1, q-1) = \frac{(p+1)!(q-1)!}{(p+q+1)!}.$$

On en déduit que

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3. Soit (p, q) . Alors

$$I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \int_0^1 t^p \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-t)^k dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$I(p, q) = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{p+k} dt = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k \frac{1}{p+k+1}.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^q \frac{(-1)^k}{p+k+1} \binom{q}{k} = I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Correction 63 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x(x^2 - 1)$ ne s'annule pas. On pose $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ et $I_4 =]1, +\infty[$.

On a $\frac{1}{x(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$, donc

$$\int \frac{2dx}{x(x^2-1)} = -2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| = \ln\left(\frac{|x^2-1|}{x^2}\right).$$

Les solutions de l'équation homogène sur I_i , $i = 1..4$, sont

$$x \mapsto \frac{\lambda_i x^2}{x^2-1}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante sous la forme $y_p(x) = \frac{\lambda(x)x^2}{x^2-1}$. Cela impose $y'_p(x) = \frac{1}{x}$ donc $y_p(x) = \frac{\ln|x|x^2}{x^2-1}$. Les solutions sur I_i sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda_i x^2 + x^2 \ln|x|}{x^2-1}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Correction 64 Comme suggéré dans l'énoncé, on exprime les dérivées de $z : t \mapsto y(e^t)$ en fonction de celles de y .

On a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t)$. On remarque que :

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } x^2 y'' + 3xy' + 4y = 7x \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + 3xy'(x) + 4y(x) = 7x \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t} y'(e^t) + 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 7te^t \\ \Leftrightarrow & z \text{ est solution de } z'' + 2z' + 4z = 7te^t \end{aligned}$$

Nous allons résoudre cette équation. On commence par résoudre l'équation homogène. Son équation caractéristique $r^2 + 2r + 4 = 0$ a pour racines $-1 \pm i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$t \mapsto e^{-t}(a \cos \sqrt{3}t + b \sin \sqrt{3}t), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $z_p : t \mapsto (at+b)e^t$ car 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $z'_p(t) = (at+a+b)e^t$ et $z''_p(t) = (at+2a+b)e^t$. La fonction z_p est solution de l'équation $z'' + 2z' + 4z = 7te^t$ si et seulement si

$$7at + 7b + 4a = 7t.$$

En identifiant les coefficients, on obtient $a = 1$ et $b = -\frac{4}{7}$. Les solutions de l'équation $z'' + 2z' + 4z = 7te^t$ sont donc les fonctions :

$$t \mapsto e^{-t}(a \cos \sqrt{3}t + b \sin \sqrt{3}t) + \left(t - \frac{4}{7}\right)e^t, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On sait que z est solution de $z'' + 2z' + 4z = 7te^t$ si et seulement si $y : x \mapsto z(\ln(x))$ est solution de $x^2 y'' + 3xy' + 4y = 7x \ln(x)$.

On en déduit que les solutions de $x^2 y'' + 3xy' + 4y = 7x \ln(x)$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{x}(a \cos(\sqrt{3} \ln x) + b \sin(\sqrt{3} \ln x)) + x(\ln x - \frac{4}{7}), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 65 On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $y_p(x) = ax$. Une telle fonction est solution si et seulement si

$$a - \frac{ax}{x} - a^2 x^2 = -9x^2$$

ce qui impose $a^2 = 9$. On choisit $y_p(x) = 3x$ comme solution particulière.

Faisons maintenant le changement de fonction inconnue suivant : $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$ où z est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Commençons par exprimer les dérivées de y en fonction de celles de z : On a :

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} \text{ et } y^2(x) = 9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)},$$

donc y est solution de $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$ si et seulement si

$$3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{xz(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 9x^2,$$

Après simplification, on obtient y est solution de $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$ si et seulement si z est solution de : $z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1$. Résolvons cette équation. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x}e^{-3x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(x) = \frac{\lambda(x)e^{-3x^2}}{x}$. La fonction z_p est solution de l'équation si et seulement si $\lambda'(x) = xe^{3x^2}$ d'où $z_p(x) = \frac{1}{6x}$. Ainsi, les solutions de l'équation $z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{6x} + \frac{\lambda}{x}e^{-3x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction z ne doit pas s'annuler sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation $1 + 6\lambda e^{-3x^2} = 0$ n'a pas de solution pour $\lambda = 0$ et, pour $\lambda \neq 0$, elle est équivalente à $e^{-3x^2} = -\frac{1}{6\lambda}$. Comme $e^{-3x^2} \in]0, 1]$, elle n'a pas de solution si $\lambda > -\frac{1}{6}$.

On en déduit que les solutions de $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$ sont les fonctions $x \mapsto 3x - \frac{6x}{1 + 6\lambda e^{-3x^2}}$ avec $\lambda \in \left]-\frac{1}{6}, +\infty\right[$.

Correction 66

Soit y une solution non-nulle.

1. si y ne s'annule pas, on a alors $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1$ donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $2\sqrt{y} = x + b$ donc

$$y = \left(\frac{x+b}{2}\right)^2. \text{ On obtient une contradiction car } x \mapsto \left(\frac{x+b}{2}\right)^2 \text{ s'annule.}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $y(a) = 0$. On sait que y est croissante puisque y' est positive, donc, si $x \leq a$, on a :

$$y(x) \leq y(a) = 0,$$

ce qui implique $y(x) \leq 0$. Or y est positive (puisque l'on considère sa racine carrée), donc cela implique $y(x) = 0$.

3. Notons K l'ensemble des points d'annulation de la fonction. On sait donc que K est non-vidé d'après la question 1. Supposons par l'absurde qu'il ne soit pas majoré. Soit M un réel quelconque, alors on peut trouver $A > M$ tel que $A \in K$ (puisque K non majoré). On a alors $y(M) = 0$ d'après la question précédente donc $M \in K$. Ainsi, si K est non majoré, alors $\mathbb{R} \subset K$ donc $K = \mathbb{R}$. Or si $K = \mathbb{R}$, la fonction s'annule sur tout $\mathbb{R}$ ce qui contredit l'hypothèse que y n'est pas la solution nulle. On a montré que K est majoré.

4. On note $c = \sup K$. On se place sur $]c, +\infty[$. La fonction y ne s'annule pas donc, d'après le travail effectué dans la première question, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$y|_{]c, +\infty[} : x \mapsto \left(\frac{x+b}{2}\right)^2.$$

La fonction y étant dérivable, elle est continue. On doit donc avoir $\lim_{x \rightarrow c^-} y(x) =$

$\lim_{x \rightarrow c^+} y(x)$. On a

— $\lim_{x \rightarrow c^-} y(x) = 0$ et

— $\lim_{x \rightarrow c^+} y(x) = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$

On en déduit que $c = -b$.

Par définition de c , on a alors

$$y : x \mapsto \begin{cases} \left(\frac{x-c}{2}\right)^2 & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \begin{cases} \left(\frac{x-c}{2}\right)^2 & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

Correction 67 On commence par remarquer que pour $x = y = 0$, on obtient $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou 1 . Si $f(0) = 0$, alors pour $y = 0$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = f(x+0) + f(x-0) = f(0)f(x) = 0,$$

donc f est nulle.

Si f est une solution non nulle, on a $f(0) = 1$. Dérivons deux fois l'équation fonctionnelle par rapport à y . On obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$

Pour $y = 0$, on obtient $f''(x) = f(x)f''(0)$.

Ainsi, les solutions de l'équation fonctionnelle sont solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 de la forme $y'' = Ky$. Les solutions d'une telle équation sont de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$ si $K = 0$ et

$$x \mapsto \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax} \text{ ou } x \mapsto \alpha \cos(ax) + \beta \sin(ax),$$

avec $a = \sqrt{\pm K}$ selon que K est positif ou négatif.

Cherchons maintenant, parmi ces solutions, celles qui sont effectivement solutions de l'équation fonctionnelle. On sait déjà qu'une solution non nulle f vérifie $f(0) = 1$. En dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à y on obtient $f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$ puis pour $x = y = 0$, $f'(0)f(0) = 0$ ce qui impose, puisque $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

Si $f : x \mapsto \alpha x + \beta$, alors $f(0) = \beta = 0$ et $f'(0) = \alpha = 0$ ce qui impose $f : x \mapsto 1$.

Si $f : x \mapsto \alpha e^{ax} + \beta e^{-a}$, on a $f(0) = 1$ donc $\alpha + \beta = 1$ et $f'(0) = 0 = \alpha - \beta$. On a donc $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ donc $f : x \mapsto \text{ch}(ax)$.

Si $f : \alpha \cos(ax) + \beta \sin(ax)$, on a $f(0) = \alpha = 1$ et $f'(0) = \beta = 0$ donc $f : x \mapsto \cos(ax)$.

En conclusion, les solutions sont la fonction nulle, la fonction constante égale à 1 et les fonctions de la forme $x \mapsto \cosh(ax)$, $\alpha > 0$ et $x \mapsto \cos(ax)$, avec $a > 0$.