

TD 8 : Droite réelle.

1 Détermination de bornes supérieures et inférieures

Exercice 1.

Déterminer le maximum de $A = \left\{ \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 2.

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, inférieure, le minimum et maximum des parties suivantes :

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $\left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. | 3. $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 > 1\}$. |
| 2. $\{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0\}$. | 4. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. |
| | 5. $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. |

Exercice 3.

Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}$.

- Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sup \{\lambda + a, a \in A\} = \lambda + \sup(A)$.
- Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, $\sup \{\lambda a, a \in A\} = \lambda \sup(A)$.
- À quoi est égal $\sup \{\lambda a, a \in A\}$ si $\lambda < 0$?

Exercice 4.

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que

- $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$,
- $B \subset A \Rightarrow \inf A \leq \inf B$,
- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,

2 Autour de la partie entière

Exercice 5.

Montrer que :

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n,$$

Exercice 6.

Pour chacune des égalités, trouver un couple $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^2$ la vérifiant :

- $\lfloor a + b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.
- $\lfloor a + b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
- $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor$
- $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor + 1$

- $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor - 1$
- $\lfloor na \rfloor \neq n \lfloor a \rfloor, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Soit $k \in \mathbb{Z}, \lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor + k$.

Exercice 7.

Montrer la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1,$$

Exercice 8.

Déterminer la limite de $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 9.

Montrer que :

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 10.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 \Leftrightarrow x^2 - \lfloor x \rfloor^2 \in [0, 1[$.

Exercice 11.

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$.

3 Si besoin d'encre un peu d'entraînement

Exercice 12.

Montrer que l'ensemble $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est borné et déterminer sa borne supérieure et sa borne inférieure. Admet-il un maximum et un minimum?

Exercice 13.

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, on note $A + B := \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$ et $-A := \{-a, a \in A\}$. Montrer les assertions suivantes :

- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
- $\inf(-A) = -\sup A$,
- $\sup A + \inf B \leq \sup(A + B)$.

Exercice 14.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Exprimer $\lfloor -y \rfloor$ en fonction de $\lfloor y \rfloor$.

Exercice 15.

Montrer que l'application $x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$.

Exercice 16.

Soit $x \leq 0$. Montrer que $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$. Le résultat est-il vrai si $x > 0$?

4 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 17.

Soient f et g deux fonctions bornées sur $[a, b]$. Montrer que

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |g(t)|.$$

Exercice 18. ⚙️ ⚙️

Déterminer $\inf_{a \in \mathbb{R}} \left(\sup_{x \in [0, 1]} |x^2 + ax - 1| \right)$.

Exercice 19. ⚙️ ⚙️

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 20. ⚙️ ⚙️

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$

Exercice 21. ⚙️ ⚙️

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Memo

- Comment trouver un majorant/minorant?
 - Utiliser l'inégalité triangulaire
 - Étudier une fonction
- Comment déterminer la borne sup/inf d'un ensemble borné?
 - Trouver un majorant/minorant puis déterminer si c'est le plus petit/grand
 - Étudier les variations d'une fonction
- Comment majorer/minorer la borne supérieure/inférieure?

Utiliser la définition c'est-à-dire le plus grand/petit des minorants/majorants.
- Comment montrer des égalités/inégalités avec des parties entières?

Revenir à la définition

Correction du TD n 8

Correction 1 On pose $f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \frac{\mathbb{R}}{x\sqrt{1-x^2}}$. On a $A = \{f(\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$. Elle est dérivable de dérivée $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, son tableau de variations est donc :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0

On a $1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2}$, donc, d'après le tableau de variations, la borne supérieure de l'ensemble est à chercher entre $f(1)$ et $f(\frac{1}{2})$. On a $f(1) = 0$ donc le maximum de notre ensemble est atteint pour $n = 2$ et vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Correction 2

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \leq 1$ donc l'ensemble est majoré. Il admet donc une borne supérieure. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = 1$ donc il ne peut y avoir de majorant plus petit et 1 est la borne supérieure de l'ensemble. Ce n'est pas un maximum car il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - \frac{1}{n} = n + \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \geq 0$ et cette valeur est atteinte pour $n = 1$, c'est donc le minimum de l'ensemble.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, l'inégalité est donc vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc l'ensemble est égal à $\mathbb{R}$. Il n'admet ni borne supérieure, ni borne inférieure.

- L'ensemble n'est pas majoré puisqu'on peut prendre x aussi grand que possible. Il est minoré par 1 donc il admet une borne inférieure. Ce n'est pas un minimum car l'inégalité est stricte donc $1 \notin \{x \in \mathbb{Q}, x^2 > 1\}$.
- L'ensemble est borné, il admet donc une borne supérieure et une borne inférieure. Pour tout $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, on a $0 \leq x \leq 1$ et 0 et 1 appartiennent à cet ensemble donc $\min([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ et $\max([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$.
- L'ensemble est à nouveau borné mais cette fois-ci, la borne inférieure, égale à 0, et la borne supérieure, égale à 1, n'appartiennent pas à l'ensemble, ce dernier n'admet donc pas de minimum ni de maximum.

Correction 3

- Soit $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, alors $x = \lambda + a$ avec $a \in \mathbb{R}$; on a donc

$$x \leq \lambda + \sup(A).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, on a

$$\sup\{\lambda + a, a \in A\} \leq \lambda + \sup(A).$$

Soit maintenant $a \in A$, alors $a + \lambda \in \{\lambda + a, a \in A\}$ donc

$$a + \lambda \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\}$$

soit encore

$$a \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on a :

$$\sup(A) \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda,$$

d'où $\sup(A) + \lambda \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\}$. Par double inégalité, on a montré l'égalité.

- On suppose $\lambda \geq 0$. Si $\lambda = 0$, le résultat est vrai, on suppose donc $\lambda > 0$. On procède, à nouveau, par double inégalité. Soit $x \in \{\lambda a, a \in A\}$, alors $x = \lambda a$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$a \leq \sup(A)$$

et $\lambda > 0$ donc

$$x \leq \lambda \sup(A).$$

Soit maintenant $a \in A$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in A\}$ donc

$$\lambda a \leq \sup\{\lambda a, a \in A\}.$$

Comme $\lambda > 0$, on peut diviser l'inégalité par λ et on obtient :

$$a \leq \frac{1}{\lambda} \sup \{\lambda a, a \in A\}.$$

Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a $\sup(A) \leq \frac{1}{\lambda} \sup \{\lambda a, a \in A\}$. Par double inégalité, on a montré l'égalité.

3. Si $\lambda < 0$, on a $\sup \{\lambda a, a \in A\} = \lambda \inf(A)$. En effet, si $x \in \{\lambda a, a \in A\}$, on a $x = \lambda a$ avec $a \in A$ donc $a \geq \inf(A)$. Comme $\lambda < 0$, multiplier par λ l'inégalité donne

$$x \leq \lambda \inf(A).$$

De même, si $a \in A$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in A\}$ donc $\lambda a \leq \sup \{\lambda a, a \in A\}$. On divise par λ ce qui inverse l'inégalité et on obtient $\frac{1}{\lambda} \sup \{\lambda a, a \in A\} \leq a$. Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a :

$$\frac{1}{\lambda} \sup \{\lambda a, a \in A\} \leq \inf(A).$$

Par double inégalité, on a montré l'égalité suivante :

$$\sup \{\lambda a, a \in A\} = \lambda \inf(A).$$

Correction 4

1. On a : $\forall a \in A, a \leq \sup B$ donc $\sup(B)$ est un majorant de A et, par suite, $\sup A \leq \sup B$.
2. On a : $\forall a \in A, a \geq \inf B$ donc $\inf B$ est un minorant de A d'où $\inf(A) \geq \inf B$.
3. Soit $x \in A \cup B$, alors soit x est dans A et $x \leq \sup A$, soit x est dans B et $x \leq \sup B$ donc, dans les deux cas, $x \leq \max(\sup A, \sup B)$. On en déduit que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$ donc $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Pour l'inégalité réciproque, on utilise la première implication : $A \subset A \cup B$ donc $\sup(A) \leq \sup(A \cup B)$ et $B \subset A \cup B$ donc $\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$. Ces deux inégalités impliquent $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$ d'où l'égalité.

Correction 5

Il suffit d'écrire

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

ce qui implique

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < (\lfloor x \rfloor + n) + 1$$

on a alors montré que l'entier $\lfloor x \rfloor + n$ vérifie la caractérisation de la partie entière de $x + n$ (comme l'unique entier N tel que $N \leq x + n < N + 1$) donc $\lfloor x \rfloor + n = \lfloor x + n \rfloor$.

Correction 6

1. Pour $a = b = \frac{1}{2}$, on a $a + b = 1$ donc $\lfloor a + b \rfloor = 1$ et $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.
2. Pour $a = b = \frac{1}{3}$, on a $a + b = \frac{2}{3}$ donc $\lfloor a + b \rfloor = 0$ et $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.
3. Pour $a = b = \frac{1}{3}$, on a $ab = \frac{1}{9}$ donc $\lfloor ab \rfloor = 0$ et $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.
4. Pour $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{3}{2}$, on a $ab = \frac{6}{5}$ donc $\lfloor ab \rfloor = 1 = \lfloor b \rfloor$ et $\lfloor a \rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.
5. Pour $a = b = -\frac{1}{3}$, on a $ab = \frac{1}{9}$ donc $\lfloor ab \rfloor = 0$ et $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = -1$ d'où l'égalité souhaitée.
6. Pour $a = \frac{1}{2}$ et $n = 2$, on a $\lfloor a \rfloor = 0$ donc $n\lfloor a \rfloor = 0$ alors que $na = 1$ donc $\lfloor na \rfloor = 1$.
7. On a déjà traité le cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = -1$. On prend $a = \frac{1}{k}$, $b = k^2 + \frac{1}{2}$, on a $ab = k + \frac{1}{2k}$ donc $\lfloor ab \rfloor = k$ et $\lfloor a \rfloor = 0$.

Correction 7

On sait que :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

et

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \quad (1)$$

D'autre part, par définition de $\lfloor x + y \rfloor$, on a :

$$\lfloor x + y \rfloor \leq x + y < \lfloor x + y \rfloor + 1 \quad (2)$$

En combinant la première inégalité de (1) et la deuxième inégalité de (2), on obtient

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x + y \rfloor + 1$$

et en combinant la deuxième inégalité de (1) et la première inégalité de (2), on obtient

$$\lfloor x + y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < \lfloor x + y \rfloor + 1 \text{ et } \lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Comme ce sont des inégalités strictes entre entiers, on en déduit que :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \text{ et } \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

et on a montré l'encadrement souhaité.

Correction 8 On sait que, $\forall x > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, donc

$$\forall x > 1, x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0,$$

on en déduit que la limite en $+\infty$ est nulle.

Correction 9 On suppose, tout d'abord, $x \in [0, 1[$. On a alors $\lfloor x \rfloor = 0$. De plus, $nx \in [0, n[$ donc $\lfloor nx \rfloor \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [0, 1[$. On a donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.

Supposons maintenant $x \in \mathbb{R}$. On écrit $x = a + \lfloor x \rfloor$ avec $a \in [0, 1[$. On a alors $nx = na + n \lfloor x \rfloor$ puis $\lfloor nx \rfloor = \lfloor na \rfloor + n \lfloor x \rfloor$ en utilisant l'exercice 5. On divise par n et on applique la partie entière :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\lfloor na \rfloor}{n} + \lfloor x \rfloor \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor \text{ en appliquant l'exercice 5} \end{aligned}$$

a $\left\lfloor \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$ donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. On a bien l'égalité souhaitée.

Correction 10 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \lfloor x^2 \rfloor &= \lfloor x \rfloor^2 \\ \Leftrightarrow \lfloor x^2 \rfloor - \lfloor x \rfloor^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lfloor x^2 - \lfloor x \rfloor^2 \rfloor &= 0 \text{ car } \lfloor x \rfloor^2 \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x^2 - \lfloor x \rfloor^2 &\in [0, 1[\end{aligned}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

Correction 11 On procède par disjonction de cas.

Si $n + m = 2p$, alors $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor = p$ et $\left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n-2p+1}{2} \right\rfloor = n-p$ donc la somme vaut n .

Si $n + m = 2p + 1$, alors $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor = p$ et $\left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n-2p}{2} \right\rfloor = n-p$ et la somme vaut, à nouveau, n .

Correction 12 On pose $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. On a $-1 \leq u_n \leq 2$ donc A est un ensemble borné. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ donc 2 est le maximum de A .

On remarque que, pour $n = 2p + 1$, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{2p+1} = -1$, cela montre qu'il ne peut exister de minorant de A strictement supérieur à -1 . On a donc

$$\inf(A) = -1.$$

L'ensemble A n'admet pas de minimum car il n'existe pas d'entier n tel que $(-1)^n + \frac{1}{n+1} = -1$.

Correction 13

1. Soit $x \in A+B$, alors $x = a+b$ avec $(a, b) \in A \times B$. Comme $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$, on a donc $a+b \leq \sup(A) + \sup(B)$. Ainsi, $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A+B$ donc $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$. Montrons l'autre inégalité. Soit $a \in A$. Alors il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B qui tend vers $\sup(B)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a + b_n \in A+B$ donc $a + b_n \leq \sup(A+B)$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq \sup(A+B) - b_n$. On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $a \leq \sup(A+B) - \sup(B)$ donc $\sup(A+B) - \sup(B)$ est un majorant de A , on en déduit que $\sup(A) \leq \sup(A+B) - \sup(B)$ ce qui montre l'autre inégalité.
2. Soit $a \in A$, alors $-a \in -A$ donc $-a \geq \inf(-A)$ puis $a \leq -\inf(-A)$ donc $-\inf(-A)$ est un majorant de A . On en déduit que $\sup(A) \leq -\inf(-A)$. Montrons l'autre inégalité. Soit $a \in A$, alors $a \leq \sup(A)$ donc $-\sup(A) \leq -a$. Comme $-a \in -A$, $-\sup(A)$ est un minorant de $-A$ donc $\inf(-A) \leq -\sup(A)$. Par double inégalité, on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.
3. Soit $b \in B$, alors $\inf(B) \leq b$. Pour tout $a \in A$, on a donc $\inf(B) + a \leq a + b$. Comme $a + b \in A+B$, on a $\inf(B) + a \leq \sup(A+B)$. Ainsi, $\sup(A+B) - \inf(B)$ est un majorant de A , on a donc $\sup(A) \leq \sup(A+B) - \inf(B)$ d'où l'inégalité souhaitée.

Correction 14 Soit $y \in \mathbb{R}$, alors par définition

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1,$$

donc

$$-\lfloor y \rfloor - 1 < -y \leq -\lfloor y \rfloor$$

- Si $y \in \mathbb{Z}$, alors $-y \in \mathbb{Z}$ donc $-\lfloor y \rfloor = -y = -\lfloor y \rfloor$.
- Sinon, on a $-\lfloor y \rfloor - 1 < -y < -\lfloor y \rfloor$ donc $-\lfloor y \rfloor = -\lfloor y \rfloor - 1$.

Correction 15 Par définition de la partie entière, on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $-2x \leq -2\lfloor x \rfloor \leq 2 - 2x$ et $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$. On en déduit que :

$$-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2.$$

Comme $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est un entier, il ne peut être égal qu'à 0 ou 1.

Correction 16 On raisonne par double implication. $\Leftarrow$ Si $x \in \mathbb{Z}$, $x^2 \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$ et $\lfloor x^2 \rfloor = x^2$ donc l'égalité est vraie.

$\Rightarrow$ On suppose maintenant $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$. Par définition de la partie entière, on a :

$$x^2 - 1 < \lfloor x^2 \rfloor \leq x^2$$

et

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Comme x est négatif, en élevant au carré la dernière inégalité, on obtient :

$$x^2 \leq \lfloor x \rfloor^2 \leq (x-1)^2.$$

Or $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$ par hypothèse et comme $\lfloor x^2 \rfloor \leq x^2$, on a $\lfloor x^2 \rfloor = x^2$ par double inégalité. Ceci montre que x^2 , et donc x , est entier.

Si x est positif, l'implication $\Leftarrow$ reste vraie. En revanche, on a l'égalité $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$ pour $x = \frac{3}{2}$ avec $x \notin \mathbb{N}$.

Correction 17 Soit $t \in [a, b]$, alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|.$$

On sait que $|f(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ et $|g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |g(t)|$. On a donc :

$$|f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |g(t)|.$$

Ceci étant valable pour tout $t \in [a, b]$, on a donc :

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |g(t)|.$$

Remarque. L'égalité est fausse, on peut s'en convaincre en prenant $g = -f$ et f non identiquement nulle.

Correction 18 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : x \mapsto x^2 + ax - 1$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto 2x + a$.

— Si $-\frac{a}{2} < 0$ c'est-à-dire $a > 0$ alors f_a est croissante, on a le tableau de variations suivant :

x	0	1
f_a	-1	a

et $\sup_{x \in [0, 1]} |f_a(x)| = \max(1, a)$.

— Si $-\frac{a}{2} > 1$, c'est-à-dire $a < -2$, f_a est décroissante, on a le tableau de variations suivant :

x	0	1
f_a	-1	a

et $\sup_{x \in [0, 1]} |f_a(x)| = |a|$

— Si $-\frac{a}{2} \in [0, 1]$, c'est-à-dire $a \in [-2, 0]$, elle atteint son maximum en 0 ou 1 et son minimum en $-\frac{a}{2}$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	$-\frac{a}{2}$	1
f_a	-1	$-\frac{a^2}{4} - 1$	a

Comme $a < 0$, le maximum de $|f_a|$ est $\frac{a^2}{4} + 1$.

On a montré :

a	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$\sup f_a $	$ a $	$\frac{a^2}{4} + 1$	1	a	

Comme pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sup_{x \in [0, 1]} |f_a(x)| \geq 1$ et $\sup_{x \in [0, 1]} |f_0(x)| = 1$, on en déduit que $\inf_{a \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0, 1]} |f_a(x)| = 1$.

Correction 19 Pour $x \in [0, 1]$, on pose $k = \lfloor nx \rfloor$. On a $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $x = a + \frac{k}{n}$ avec

$a \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$. Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $\left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor = \left\lfloor a + \frac{j+k}{n} \right\rfloor$ donc

$$\left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } j+k < n \\ 1 & \text{si } j+k \geq n \end{cases}$$

On a donc $\sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor = \underbrace{\sum_{j=0}^{n-k-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor}_{=0} + \underbrace{\sum_{j=n-k}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor}_{=1} = k$ car il y a k termes entre $n-k$ et $n-1$. Comme $k = \lfloor nx \rfloor$, on a le résultat pour $x \in [0, 1[$.

On se ramène au cas précédent pour le cas général : Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x = a + \lfloor x \rfloor$ avec $a \in [0, 1[$. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor a + \lfloor x \rfloor + \frac{j}{n} \right\rfloor \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\lfloor x \rfloor + \left\lfloor a + \frac{j}{n} \right\rfloor \right) \text{ car } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ &= n \lfloor x \rfloor + \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor a + \frac{j}{n} \right\rfloor \\ &= n \lfloor x \rfloor + \lfloor na \rfloor \text{ d'après le cas traité précédemment} \end{aligned}$$

Comme $n \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, on applique encore l'exercice 5 pour écrire

$$n \lfloor x \rfloor + \lfloor na \rfloor = \lfloor n \lfloor x \rfloor + na \rfloor$$

et comme $n \lfloor x \rfloor + na = n(a + \lfloor x \rfloor) = nx$, on a bien le résultat pour $x \in \mathbb{R}$.

Correction 20 On commence par trouver une inégalité entre $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ et $\sqrt{4n+2}$ en raisonnant (par exemple) par équivalence :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{4n+2} &\Leftrightarrow n+1+2\sqrt{n(n+1)}+n < 4n+2 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi. Par croissances de la partie entière, on en déduit que

$$\left\lfloor \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor.$$

On remarque que $\sqrt{4n+2}$ n'est jamais entier. En effet, si m est entier, alors $m^2 = 4r^2$ ou $4r^2 + 4r + 1$ selon que m est pair ou non. On n'a donc jamais un carré de la forme $4n+2$.

Pour conclure, on suppose par l'absurde qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < m < \sqrt{4n+2},$$

et on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < m < \sqrt{4n+2} \\ \Leftrightarrow n+1+2\sqrt{n(n+1)}+n < m^2 < 4n+2 &\text{ par positivité des deux membres} \\ \Leftrightarrow 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < m^2 < 4n+2 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < m^2-2n-1 < 2n+1 \\ \Leftrightarrow 4n(n+1) < (m^2-2n-1)^2 < 4n^2+4n+1 &\text{ par positivité des deux membres} \end{aligned}$$

Ce dernier encadrement est absurde car $(m^2-2n-1)^2$ est un entier et il ne peut être strictement compris entre deux entiers consécutifs. On en déduit que

$$\left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{4n+2}$$

donc $\left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right\rfloor$ et par double inégalité, on a montré l'égalité.

Correction 21 Pour tout entier k tel que $j^2 \leq k < (j+1)^2$ c'est-à-dire pour $k \in \llbracket j^2, (j+1)^2 - 1 \rrbracket$, on a $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = j$. On peut réécrire la somme en groupant les termes identiques :

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \sqrt{k} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j^2 \leq k < (j+1)^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j^2 \leq k < (j+1)^2} j.$$

Il y a $(j+1)^2 - j^2 = 2j+1$ entiers entre j^2 et $(j+1)^2 - 1$. La somme est donc égale à :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} j(2j+1) \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \text{ en utilisant la formule de la somme des carrés} \\ &= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}. \end{aligned}$$