

TD 8 : Droite réelle.

1 Détermination de bornes supérieures et inférieures

Exercice 1.

Déterminer le maximum de $A = \left\{ \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 2.

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, inférieure, le minimum et maximum des parties suivantes :

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $\left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. | 3. $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 > 1\}$. |
| 2. $\{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0\}$. | 4. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. |
| | 5. $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. |

Exercice 3.

Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}$.

- Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sup \{\lambda + a, a \in A\} = \lambda + \sup(A)$.
- Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, $\sup \{\lambda a, a \in A\} = \lambda \sup(A)$.
- À quoi est égal $\sup \{\lambda a, a \in A\}$ si $\lambda < 0$?

Exercice 4.

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que

- $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$,
- $B \subset A \Rightarrow \inf A \leq \inf B$,
- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,

2 Autour de la partie entière

Exercice 5.

Montrer que :

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n,$$

Exercice 6.

Pour chacune des égalités, trouver un couple $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^2$ la vérifiant :

- $\lfloor a + b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.
- $\lfloor a + b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
- $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor$
- $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor + 1$

- $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor - 1$
- $\lfloor na \rfloor \neq n \lfloor a \rfloor, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Soit $k \in \mathbb{Z}, \lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor + k$.

Exercice 7.

Montrer la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1,$$

Exercice 8.

Déterminer la limite de $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 9.

Montrer que :

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 10.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 \Leftrightarrow x^2 - \lfloor x \rfloor^2 \in [0, 1[$.

Exercice 11.

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$.

3 Si besoin d'encre un peu d'entraînement

Exercice 12.

Montrer que l'ensemble $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est borné et déterminer sa borne supérieure et sa borne inférieure. Admet-il un maximum et un minimum?

Exercice 13.

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, on note $A + B := \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$ et $-A := \{-a, a \in A\}$. Montrer les assertions suivantes :

- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
- $\inf(-A) = -\sup A$,
- $\sup A + \inf B \leq \sup(A + B)$.

Exercice 14.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Exprimer $\lfloor -y \rfloor$ en fonction de $\lfloor y \rfloor$.

Exercice 15.

Montrer que l'application $x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$.

Exercice 16.

Soit $x \leq 0$. Montrer que $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$. Le résultat est-il vrai si $x > 0$?

4 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 17.

Soient f et g deux fonctions bornées sur $[a, b]$. Montrer que

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |g(t)|.$$

Exercice 18. ⚙️ ⚙️

Déterminer $\inf_{a \in \mathbb{R}} \left(\sup_{x \in [0, 1]} |x^2 + ax - 1| \right)$.

Exercice 19. ⚙️ ⚙️

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 20. ⚙️ ⚙️

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$

Exercice 21. ⚙️ ⚙️

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Memo

- Comment trouver un majorant/minorant?
 - Utiliser l'inégalité triangulaire
 - Étudier une fonction
- Comment déterminer la borne sup/inf d'un ensemble borné?
 - Trouver un majorant/minorant puis déterminer si c'est le plus petit/grand
 - Étudier les variations d'une fonction
- Comment majorer/minorer la borne supérieure/inférieure?

Utiliser la définition c'est-à-dire le plus grand/petit des minorants/majorants.
- Comment montrer des égalités/inégalités avec des parties entières?

Revenir à la définition