Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
Feuille 10

TD 10 : Systèmes linéaires et calcul matriciel .

1 Rang d'un système

Exercice 1.
Déterminer le rang du système

$$\begin{cases} x+2y+t &= a\\ y-z+t &= b\\ x+2y+t &= c\\ x+3y-z+2t &= d \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit $a\in\mathbb{R}$, calculer le rang des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x_1+ax_2+x_3 &= x\\ ax_1+x_2+x_3 &= y\\ x_1+ax_2+x_3 &= z \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+x_2+ax_3 &= x\\ x_1+ax_2+x_3 &= y\\ ax_1+x_2+x_3 &= z \end{cases} \quad \begin{cases} a^2x_1+ax_2+x_3 &= x\\ x_1+x_2+ax_3 &= y\\ x_1+ax_2+a^2x_3 &= z \end{cases}$$

2 Résolution de systèmes

Exercice 3.

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues (x,y,z) :

$$\begin{cases} x+y+3z = 5\\ x-y-z = 1\\ x+z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-2y+2z = a\\ -x+2y-3z = b\\ x+2y+z = c \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y+z = 3\\ 3x-y-2z = 0\\ x+y-z = -2\\ x+2y+z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4.

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues (x,y,z,t) :

$$\begin{cases} x+y+4z+7t = b_1\\ x+y+4z+5t = b_2\\ x+y+3z+2t = b_3\\ x+y+z+t = b_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-z+2t = a\\ x-y+z-t = b\\ 4x-y+2z-t = c \end{cases}$$

Exercice 5. la matrice circulante :
Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Donner les solutions du système d'inconnues $x_1,\dots,x_n$ en fonction de λ :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1\\ x_3 = \lambda x_2\\ \vdots\\ x_n = \lambda x_{n-1}\\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}$$

Exercice 6. la matrice compagnon
Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $(a_0,a_1\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n$. A quelle condition sur λ le système homogène suivant possède-t-il des solutions non nulles? Montrer qu'alors ces solutions sont paramétrées par exactement une variable libre.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0\\ -1 & \lambda & \ddots & & \vdots & a_1\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 & a_{n-3}\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda & a_{n-2}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -a_{n-1}+\lambda \end{pmatrix}$$

3 Produit matriciel

Exercice 7.
Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix}$ de deux façons différentes. (Quelle est la plus judicieuse ?)

Exercice 8.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier $S=(2A)(3B)-(A+2B)^2+(A-B)(A+B)$ et $T=(A+B)(2A^2-2B)-2A^2(A+B)+(-A+B)^2$

Exercice 9.
Montrer que si A est inversible et commute avec B, alors A^{-1} commute avec B.

Exercice 10.
Soit $B=(i)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Calculer B^2.

Exercice 11.
Soit $A=\left(\frac{i}{j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, calculer A^2.

Exercice 12.
Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^\top A)=0$. Montrer que A est la matrice nulle.

4 Calcul de puissances

Exercice 13.
Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$. Calculer J^r pour tout entier $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 14.
Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^r pour $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 15.
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A + I_3)^3$ est la matrice nulle.
2. En déduire une expression de A^n pour tout entier n.

Exercice 16.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la puissance n-ème de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(On calculera $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, ..., on devinera les coefficients de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on le vérifiera, si besoin par récurrence.)

Exercice 17.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que $PDP^{-1} = A$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
3. En déduire A^n pour tout entier n.

5 Calcul de l'inverse

Exercice 18.

Calculer l'inverse de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 19.

Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 20.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - I_n = 0$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

6 Détermination de l'inversibilité d'une matrice

Exercice 21.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 22.
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 23.
La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 24.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}$. Calculer $\det(M)$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour M.

Exercice 25.
Soit $(a_i)_{i\in N}$ une famille de réels distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0) V(a_1, \cdots, a_n)$.
2. En déduire la valeur de $V(a_0, \cdots, a_n)$.

Exercice 26.
Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & m & 2 & -1 \\ m & 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & 0 & m \end{pmatrix}$

Exercice 27. [CCP]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n-x \end{vmatrix}$

Exercice 28. [CCP]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}$

Exercice 29.
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$

1. Exprimer D_{n+2} en fonction de D_{n+1} et D_n.
2. En déduire une expression de D_n pour tout $n \geqslant 1$.

7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 30.
Quel est le rang du système

$$\begin{cases} x_2 + x_3 & = a \\ x_3 + x_4 + x_5 & = b \\ x_5 & = c \\ x_5 + x_6 + x_7 & = d \end{cases}$$

Exercice 31.

Donnez le rang des systèmes homogènes suivants :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \ldots + (n+1)x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ nx_1 + (n+1)x_2 + (n+2)x_3 + \ldots + (2n-1)x_n & = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + \ldots + x_n & = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \ldots + x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + ax_{n-1} + x_n & = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + ax_n & = 0 \end{cases}$$

Exercice 32.

Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$(S_1) \begin{cases} x+3y+4z+7t & = & b_1 \\ x+3y+4z+5t & = & b_2 \\ x+3y+3z+2t & = & b_3 \\ x+y+z+t & = & b_4 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x+3y+5z+3t & = & b_1 \\ x+4y+7z+3t & = & b_2 \\ y+2z & = & b_3 \\ x+2y+3z+2t & = & b_4 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x+y+2z-t & = & b_1 \\ -x+3y+t & = & b_2 \\ 2x-2y+2z-2t & = & b_3 \\ 2y+z & = & b_4 \end{cases} \qquad (S_4) \begin{cases} x+2y+z+2t & = & b_1 \\ -2x-4y-2z-4t & = & b_2 \\ -x-2y-z-2t & = & b_3 \\ 3x+6y+3z+6t & = & b_4 \end{cases}$$

Exercice 33.
Résoudre pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ les systèmes :

$$T_1 : \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ & \frac{1}{2}x_2 & & = & -1 \end{cases} \quad \text{puis } T_2 : \begin{cases} -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 34.
Résoudre :

1. dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} 2y-z &= 1\\ -2x-4y+3z &= -1\\ x+y-3z &= -6\end{cases}$
2. dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x+z &= 1\\ y+z &= 0\\ x+y &= 1\\ 2x+3y &= 0\end{cases}$
3. dans $\mathbb{R}^3$: $x-2y+z=3$.
4. dans $\mathbb{R}^4$: $\begin{cases} 2x-z+t &= 2\\ -2y+z+t &= 1\\ 2x+2y-2z &= 1\\ 2x-2y+2t &= 3\end{cases}$
5. dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x+y+3z &= 5\\ x-y-z &= 1\\ x+z &= 3\end{cases}$

Exercice 35.
Soit $B=(b_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{Tr}(ABA)$ où A est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ avec uniquement des 1 comme coefficients.

Exercice 36.
Donner l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 37.
Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer A^2 et remarquer que $A^2=A+2I_3$. Retrouver son inverse.

Exercice 38.
Calculer M^r pour $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 39.
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer le coefficient d'indice (r,l) de la matrice $AE_{ij}B$.
2. En déduire que si AXB est la matrice nulle pour tout $X\in M_n(\mathbb{R})$, alors A ou B est nulle.

Exercice 40.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $A\in M_n(K)$. On suppose que pour tout $X\in M_n(K)$, on a $(XA)^2=(0)$. Montrer que $A=0$.

Exercice 41. ⚙

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle centre de $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble Z des matrices $A\in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $Z=\{A\in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall B\in M_n(\mathbb{K}), AB=BA\}$.

1. Pour $(k,l)\in\{1,\dots,n\}^2$ et $A\in M_n(\mathbb{K})$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A pour que les matrices A et $E_{k,l}$ commutent.
2. En déduire que le centre Z de $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires.

Exercice 42.
Soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A+A^{-1}=I_n$. Pour tout entier k, on note $A^{-k}=(A^{-1})^k$. Montrer que pour tout entier k, il existe un réel μ_k tel que $A^k+A^{-k}=\mu_k I_n$ et déterminer μ_k.

Exercice 43.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et

$$M_{ab}=\begin{pmatrix} a & b & \dots & b\\ b & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b\\ b & \dots & b & a\end{pmatrix}$$

Calculer M_{ab}^r pour tout entier r.

Memo

- Comment déterminer le rang d'un système ?
  En l'échelonnant et en comptant le nombre d'équations restantes
- Comment déterminer à quelle(s) condition(s) un système a des solutions ?
  En l'échelonnant et en lisant les dernières lignes dont le membre de gauche est nul
- Comment résoudre un système linéaire ?
  - En faisant des opérations élémentaires (à préciser) sur les lignes
  - En faisant le pivot de Gauss puis en substituant.
- Comment déterminer le rang d'une matrice ?
  - Échelonner la matrice
  - Raisonner sur les lignes/colonnes en petite dimension
- Comment déterminer si une matrice est inversible ?
  - Observer la matrice
  - Déterminer si le système associé possède une unique solution
- Comment déterminer l'inverse d'une matrice A ?
  - Résoudre le système $AX = Y$
  - Faire des opérations élémentaires sur les lignes
  - Trouver son inverse
- Comment déterminer la puissance d'une matrice ?
  - Prendre la puissance des coefficients diagonaux
  - Utiliser la formule du binôme de Newton
  - "Intuiter" une formule et la montrer par récurrence
  - Remarquer que la matrice s'écrit PMP^{-1}
- Comment multiplier des matrices de taille n ?
  Revenir à la définition du produit matriciel

Correction du TD n 10

Correction 1

On fait $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_1$, on obtient

$$\begin{cases} x+2y+t & = a \\ y-z+t & = b \\ 0 & = c-a \\ 0 & = d-a-b \end{cases}$$

On en déduit que le rang du système est 2.

Correction 2

— Si $a = 1$ le rang vaut 1 car toutes les lignes du système sont identiques. Si $a \neq 1$, le rang vaut 2 car $L_1 = L_3$ (et L_1 et L_2 non colinéaires.

— Si $a = 1$ le rang vaut 1 car toutes les lignes du système sont identiques.
Si $a = -2$, on a $L_1 + L_2 + L_3 = 0$, et L_1 et L_2 non colinéaires donc le rang vaut 2.
Si $a \notin \{-2, 1\}$, on triangularise le système et on constate que le rang vaut 3.

— On fait $L_3 \leftrightarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_2$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & \text{z} \\ 0 & 1-a & a-a^2 & \text{y-z} \\ 0 & a-a^2 & 1-a^3 & x-a^2y \end{array}\right)$$

On fait ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - aL_2$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & \text{z} \\ 0 & 1-a & a-a^2 & \text{y-z} \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x-a^2y-ay+az \end{array}\right)$$

On en déduit que si $a = -1$ le rang vaut 2, si $a = 1$, le rang vaut 1, sinon le rang vaut 3.

Correction 3

L'ensemble des solutions du premier système est $\{(3-z, 2-2z, z), z \in \mathbb{R}\}$.
Le deuxième système a une unique solution $\left(\left(\frac{c+4a+3b}{10}\right), \left(\frac{-2a+b+7c}{20}\right), \left(\frac{-a-2b+c}{5}\right)\right)$.
Le troisième système a une unique solution $(1, -1, 2)$.

Correction 4

— La condition de compatibilité est $9b_2 - 5b_1 + 2b_4 - 6b_3 = 0$. Si elle est vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\{\left(-\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2} + \frac{3b_4}{2} - y, y, -\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, \frac{b_1 - b_2}{2}\right), y \in \mathbb{R}\}$$

— La condition de compatibilité est $a + 3b - c = 0$. Si elle est vérifiée, les solutions sont

$$\{\left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{3} - \frac{1}{3}z, \frac{a}{3} - \frac{b}{3} + \frac{2}{3}z - t, z, t\right), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Correction 5

On montre facilement que $x_1 = \lambda^n x_1$ donc

— Soit $\lambda^n \neq 1$ donc $x_1 = 0$ et dans ce cas $x_i = 0, \forall i$ donc la seule solution est la solution nulle.

— Soit $\lambda^n = 1$ et dans ce cas les solutions sont les n-uplets de la forme $x_1(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$, $x_1 \in \mathbb{R}$.

Correction 6

On fait $L_1 \leftarrow L_1 \sum_{i=2}^{n} \lambda^{i-1} L_i$, on obtient le système homogène associé à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & P(\lambda) \\ -1 & \lambda & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & a_{n-1} + \lambda \end{pmatrix}$$

avec $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On permute ensuite L_n et L_1 et on obtient un système triangulaire dont les coefficients diagonaux valent -1 sauf le dernier qui vaut $P(\lambda)$. On a donc des solutions non-nulles si λ est racine du polynôme P. Si c'est le cas, la dernière variable est libre et elle paramètre les solutions.

Correction 7

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a aussi

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

donc, sans aucun calcul,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

C'est la deuxième méthode la plus judicieuse.

Correction 8 On a $S = 5AB - 3BA - 5B^2$ et $T = A^2 - B^2 - 3AB - BA + 2BA^2 - 2A^2B$

Correction 9 On suppose $AB = BA$, on a alors $A^{-1}AB = A^{-1}BA$ puis $B = A^{-1}BA$ car $A^{-1}A = I$. Enfin, on obtient $BA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$ donc $BA^{-1} = A^{-1}B$ et A^{-1} commute avec B.

Correction 10 On pose $B^2 = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a $b_{ij} = i$, d'après la formule du produit matriciel, on a donc, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} ik = \frac{n(n+1)}{2} i$.

On en déduit que $B^2 = \frac{n(n+1)}{2} B$.

Correction 11 On pose $A^2 = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a $a_{ij} = \frac{i}{j}$, d'après la formule du produit matriciel, on a donc, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{k}\frac{k}{j} = n\frac{i}{j}$.

On en déduit que $A^2 = nA$.

Correction 12 Notons $A = (a_{ij})$, $A^\top = (b_{ij})$ et $A^\top A = (c_{ij})$. On sait que, pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$,

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}.$$

Or, $b_ik = a_{ki}$, par définition de la transposée. On a donc :

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2,$$

d'où :

$$\mathrm{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2.$$

On a supposé $\mathrm{Tr}(A^\top A) = 0$. Comme c'est une somme nulle de réels positifs, cela implique qu'ils sont tous nuls. On a donc :

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ki} = 0,$$

ce qui montre que la matrice est nulle.

Correction 13 On a $J^2 = nJ$ puis, par récurrence, pour tout $r \geqslant 1$, $J^r = n^{r-1}J$ (et $J^0 = I_n$).

Correction 14 On écrit $M = 2I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

On sait que I_3 commute avec toutes les matrices, en particulier avec N donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$M^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} N^k (2I_3)^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} 2^{r-k} N^k.$$

Or,

$$N^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et

$$N^3 = (0)$$

donc la somme se réduit à :

$$M^r = \sum_{k=0}^{2} \binom{r}{k} 2^{r-k} N^k = 2^r I_3 + 2^{r-1} r N + 2^{r-2} \frac{r(r-1)}{2} N^2,$$

soit encore :

$$M^r = 2^r I_3 + \begin{pmatrix}0 & 2^{r-1}r & -2^{r-1}r\\ 0 & 0 & 2^{r-1}r\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 2^{r-3}r(r-1)\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

d'où :

$$M^r = \begin{pmatrix}2^r & 2^{r-1}r & 2^{r-3}r(r-5)\\ 0 & 2^r & 2^{r-1}r\\ 0 & 0 & 2^r\end{pmatrix}.$$

Correction 15

1. $A+I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ donc $(A+I_3)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ et $(A+I_3)^3=0_3$.
2. On peut appliquer le binôme de Newton puisque $(A+I_3)$ et $-I_3$ commutent. On a

$$\begin{aligned}A^n &= ((A+I_3)+(-I_3))^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(A+I_3)^k(-I_3)^{n-k}\\ &= (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1}(A+I_3)+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}(A+I_3)^2\end{aligned}$$

On a donc

$$A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&(-1)^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\n(-1)^{n-1}&0&0\\0&n(-1)^{n-1}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\n(-1)^{n-1}&(-1)^n&0\\\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}&n(-1)^{n-1}&(-1)^n\end{pmatrix}$$

Correction 16

$$A^2=(0) \text{ donc } A^n=(0), \forall n\geqslant 2$$

$$B^2=3B \text{ donc } B^n=3^{n-1}B, \forall n\geqslant 1.$$

$$C^2=2C \text{ donc } C^n=2^{n-1}C, \forall n\geqslant 1.$$

$$D^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} \text{ donc } D^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$E^3=(0) \text{ donc } E^n=(0)\forall n\geqslant 3$$

Enfin, on a

$$F^4=-F \text{ donc } F^5=-F^2, F^6=-F^3 \text{ puis } F^7=F.$$

Si on prend $n=3p+q$ avec $q\in[\![1,3]\!]$, on a $F^n=(-1)^pF^q$.

Correction 17

1. On pose $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ et on cherche à résoudre le système $PX=Y$:

$$\begin{cases}x_1+x_3 &= y_1\\ -x_1+x_2+x_3 &= y_2\\ -x_2+x_3 &= y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_3 &= y_1\\ 3x_3 &= y_1+y_2+y_3 \quad L_2\leftarrow L_1+L_2+L_3\\ -x_2+x_3 &= y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1 &= 2y_1-y_2-y_3\\ 3x_3 &= y_1+y_2+y_3 \quad L_1\leftarrow 3L_1-L_2, L_3\leftarrow -3L_3+L_2\\ 3x_2 &= y_1+y_2-2y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1 &= 2y_1-y_2-y_3\\ 3x_2 &= y_1+y_2-2y_3\\ 3x_3 &= y_1+y_2+y_3\end{cases}$$

d'où

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

2. On a $AP=\begin{pmatrix}1&0&4\\-1&1&4\\0&-1&4\end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP=D$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $D^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}$ d'où

$$A^n=PD^nP^{-1}.$$

On a $PD^n=\begin{pmatrix}1&0&2^{2n}\\-1&1&2^{2n}\\0&-1&2^{2n}\end{pmatrix}$ puis $A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{2n}+1&2^{2n}-1&2^{2n}-1\\2^{2n}-1&2^{2n}+2&2^{2n}-1\\2^{2n}-1&2^{2n}-1&2^{2n}+2\end{pmatrix}$

Correction 18 Le système associé à la matrice est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z &=& b_1 \\ x+y &=& b_2 \\ x-y+z &=& b_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+z &=& b_1 \\ x+y &=& b_2 \\ y &=& b_1-b_3 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& b_1-b_3 \\ x &=& -b_1+b_2+b_3 \\ z &=& 2b_1-b_2-b_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -b_1+b_2+b_3 \\ y &=& b_1-b_3 \\ z &=& 2b_1-b_2-b_3. \end{array}\right.$$

On en déduit que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction 19 Le système associé est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2 &=& b_1 \\ x_3 &=& b_2 \\ \ddots && \\ x_1 &=& b_n, \end{array}\right.$$

et son unique solution est :

$$(x_1,\dots,x_n) = (b_n, b_1, \dots, b_{n-1})$$

On en déduit que l'inverse de la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction 20 On écrit

$$A(A+2I_n) = I_n,$$

on peut alors affirmer que A est inversible et que son inverse est $A+2I_n$.

Correction 21 non car la somme des deux premières lignes est égale à la troisième ligne, on en déduit que le déterminant est nul donc la matrice n'est pas inversible.

Correction 22 A n'est pas inversible car $C_2 - C_1 = C_3$ donc son déterminant est nul.

On a

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ en faisant } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &= -3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la deuxième ligne} \\ &= 3 \neq 0 \end{aligned}$$

la matrice B est donc inversible.

On a

$$\begin{aligned} \det(C) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ en faisant } L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ &= 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -21 \neq 0 \end{aligned}$$

La matrice est donc inversible.

On remarque que la dernière colonne de D est égale à deux fois la première colonne, on en déduit que D n'est pas inversible.

Correction 23 Le système associé est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2 &=& b_1 \\ x_3 &=& b_2 \\ \ddots && \\ x_1 &=& b_n \end{array}\right.$$

Il est clair qu'il possède une unique solution $(b_n, b_1, \ldots, b_{n-1})$ donc la matrice associée est inversible.

Correction 24 On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ car la somme des colonnes donne toujours le même nombre. On factorise alors par $1+2a+2b$ puis on enlève la première ligne à toutes les autres lignes. On développe par rapport à la première colonne et on obtient :

$$\det(M) = (1+2a+2b)\begin{vmatrix} 1+a-b & b-a & a-b \\ 0 & 1 & 0 \\ a-b & b-a & 1+a-b \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la deuxième ligne. On trouve $(1+2a+2b)((1+a-b)^2 - (a-b)^2) = (1+2a+2b)(1+2a-2b)$. La matrice M est donc inversible si et seulement si $1+2a+2b \neq 0$ et $1+2a-2b \neq 0$.

Correction 25

1. On enlève la première ligne à toutes les autres, on obtient :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 0 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0^2 & \cdots & a_1^n - a_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_n - a_0 & a_n^2 - a_0^2 & \cdots & a_n^n - a_0^n \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0^2 & \cdots & a_1^n - a_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n - a_0 & a_n^2 - a_0^2 & \cdots & a_n^n - a_0^n \end{vmatrix}.$$

On met alors en facteur $a_i - a_0$ sur chaque ligne :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0)\begin{vmatrix} 1 & a_0 + a_1 & a_0^2 + a_0 a_1 + a_1^2 & \cdots & a_0^{n-1} + a_0^{n-2} a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_0 + a_2 & a_0^2 + a_0 a_2 + a_2^2 & \cdots & a_0^{n-1} + a_0^{n-2} a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & a_0 + a_n & a_0^2 + a_0 a_n + a_n^2 & \cdots & a_0^{n-1} + a_0^{n-2} a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On fait ensuite $C_1 \leftarrow C_1 - a_0 C_2$ ce qui donne :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_0^2 + a_0 a_1 + a_1^2 & \cdots & a_0^{n-1} + a_0^{n-2} a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_0^2 + a_0 a_2 + a_2^2 & \cdots & a_0^{n-1} + a_0^{n-2} a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_0^2 + a_0 a_n + a_n^2 & \cdots & a_0^{n-1} + a_0^{n-2} a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

puis $C_3 \leftarrow C_3 - a_0^2 C_1 - a_0 C_2$ pour obtenir :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_0^{n-1} + a_0^{n-2} a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_0^{n-1} + a_0^{n-2} a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_0^{n-1} + a_0^{n-2} a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et ainsi de suite jusqu'à obtenir :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0)\right) V(a_1, \cdots, a_n).$$

2. Déterminons la valeur de $V(a_0, \cdots, a_n)$ par récurrence sur n. On note P_n la propriété $V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i < j < n}(a_j - a_i)$.

   Pour $n = 1$, on a :

$$V(a_0, a_1) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = (a_1 - a_0)$$

   et la propriété est vraie.

   On suppose que la propriété est vraie au rang $n-1$. D'après la question précédente, on a :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n}(a_1 - a_0)\right) V(a_1, \cdots, a_n).$$

   Or, par hypothèse de récurrence appliquée aux n réels distincts $a_1, \cdots, a_n$, on a :

$$V(a_1, \cdots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n}(a_1 - a_0)\right) \prod_{1 \leqslant i < j < n}(a_j - a_i),$$

   d'où :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i < j < n}(a_j - a_i).$$

   Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

Correction 26 On note D le déterminant recherché. On fait $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m & 2 & -1 \\ 0 & 1-m^2 & -1-2m & 2m \\ 0 & 1-m & m-2 & 2 \\ 0 & m & 0 & m \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne, on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 1-m^2 & -1-2m & 2m \\ 1-m & m-2 & 2 \\ m & 0 & m \end{vmatrix}$$

On fait alors $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ puis on développe par rapport à la dernière ligne et on obtient :

$$D = m \begin{vmatrix} -1-m^2-2m & -1-2m \\ -m-1 & m-2 \end{vmatrix} = m(-m^3 - 2m^2 + 2m - 3)$$

Correction 27 On fait $L_i \leftarrow L_1$ pour tout $i > 1$, on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -x & & & \vdots \\ 1 & 0 & 1-x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & n-1-x \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} -x & & & 0 \\ 0 & 1-x & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n-1-x \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} (k-x)$$

Correction 28 On observe que $C_2 - C_1 = C_3 - C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc le déterminant est nul.

Correction 29

1. On développe par rapport à la première colonne, on obtient :

$$D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - a \begin{vmatrix} b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

On développe ensuite le deuxième déterminant par rapport à sa première ligne, on obtient

$$D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - abD_n.$$

2. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont les racines réelles sont a et b. On a $D_1 = a+b$ et $D_2 = a^2 + b^2 + ab$
   - Si $a = b = 0$, $D_n = 0$ pour tout n.
   - Si $a = b \neq 0$, on sait que D_n est de la forme $(\alpha + \beta n)a^n$. Avec les premières valeurs, on obtient $\alpha + \beta = 2$ et $\alpha + 2\beta = 3$ donc $\alpha = \beta = 1$ et $D_n = (n+1)a^n$.
   - Si $a \neq b$, on sait que D_n est de la forme $\alpha a^n + \beta b^n$. Avec les premières valeurs, on obtient $\alpha a + \beta b = a + b$ et $\alpha a^2 + \beta b^2 = a^2 + b^2 + ab$ donc $\beta b(b-a) = b^2$ et $\alpha a(a-b) = a^2$. Si $a = 0$, $D_n = b^n$ et si $b = 0$, $D_n = b^n$. Si $ab \neq 0$, on a $\alpha = \dfrac{a}{a-b}$ et $\beta = -\dfrac{b}{a-b}$ donc

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

   On remarque que cette formule reste vraie si a ou b est nul.

Correction 30 On triangularise le système en faisant $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$. On constate que le rang vaut 4.

Correction 31 Le rang du premier est équivalent à celui obtenu en faisant $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour $i = 2..n$ qui ressemble à ça :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ qui est aussi équivalent à } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (L_i \leftarrow L_2, i = 3..n)$$

Le rang est donc 2.

Pour le deuxième système, on obtient un système équivalent en faisant $l_n \leftrightarrow L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & & a & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait ensuite $L_i \leftarrow L_i - L_1, \forall i = 2..n-1$ et $L_n \leftarrow L_n - aL_1$ ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \dots & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & & 0 & 1-a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & \dots & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Enfin, on fait $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=2}^{n-1} L_i$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \dots & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & & 0 & 1-a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m \end{pmatrix}$$

avec $m = (1-a)(n-1+a)$. On a donc trois cas possibles :
- $a \neq 1$ et $a \neq 1-n$ et le système est de rang n.
- $a = 1-n$ et le système est de rang $n-1$.
- $a = 1$ et le système est de rang 1.

Correction 32 (S_1) : On a une solution unique pour tout b_1, b_2, b_3, b_4, c'est

$$\left(\frac{b_1}{4}, \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2}, \frac{3b_4}{2}, \frac{5b_1}{4} - \frac{9b_2}{4} + \frac{3b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, -\frac{3b_1}{2} + \frac{5b_2}{2} - b_3, \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}\right)$$

(S_2) : On a des solutions si $b_2 = b_1 + b_3$. L'ensemble des solutions est

$$\{(-2b_1 + 3b_4 - 11z, b_3 - 2z, b_1 - b_4 - b_3, z), z \in \mathbb{R}\}$$

(S_3) : On a des solutions si $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$ et $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$.L'ensemble des solutions est

$$\{(b_1 - 2b_4 + 3y + t, y, b_4 - 2y, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

(S_4) : On a des solutions si $b_2 = -2b_1$ et $b_3 = -b_1$ et $b_4 = 3b_1$. L'ensemble est alors

$$\{(b_1 - 2y - z - 2t, y, z, t), (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}$$

Correction 33 L'unique solution de T_1 est $(-3, -2, -1/2)$, les solutions de T_2 sont $\{(1, 2-2t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Correction 34

1. Il a comme unique solution $(1, 2, 3)$.
2. Il n'y a aucune solution.
3. Les solutions sont $\left\{(3+2y-z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   Ici, y et z sont variables libres.
4. On remarque que $L_1 + l_2 = L_4$ et $L_3 - L_1 = -L_2$ donc le système est équivalent aux deux premières lignes, les solutions sont
   $$\left\{\left(1 + \frac{z}{2} - \frac{t}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{t}{2}, z, t\right), (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
   Ici, z et t sont variables libres.
5. On remarque que $L_1 + L_2 = 2L_3$, les solutions sont $\{(3-z, 2-2z, z), z \in \mathbb{R}\}$, ici z est variable libre.

Correction 35 On utilise la formule du produit matriciel. Le coefficient $(AB)_{ij}$ d'indice (i, j) du produit AB est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj},$$

car A est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On calcule maintenant le coefficient d'indice (i, j) du produit matriciel ABA :

$$\sum_{l=1}^{n} (AB)_{il} a_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{kl}.$$

On a montré que tous les coefficients du produit matriciel ABA sont identiques, égaux à la somme de tous les coefficients de B. Si on note s la somme de tous les coefficients de B, on a donc :

$$ABA = sA$$

puis

$$\operatorname{Tr}(ABA) = s\operatorname{Tr}(A) = ns.$$

Correction 36 On écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On fait $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

On a désormais une matrice triangulaire supérieure. On va maintenant " éliminer " les coefficients au-dessus de la diagonale. Pour cela, on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 + L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

La matrice diagonale obtenue est égale à l'identité, on n'a donc pas besoin de diviser chaque ligne par la valeur du coefficient diagonal. On retrouve que l'inverse de la matrice donnée est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction 37

1. On résout le système linéaire associé, on trouve que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$ On a donc $A^2 - A = 2I_3$ donc $A(A - I_3) = 2I_3$. On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$ ce qui est le résultat trouvé à la question précédente.

Correction 38

On sait déjà que les coefficients diagonaux seront élevés à la puissance calculée et que toute puissance de M sera triangulaire supérieure. On calcule les premières puissances. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

et :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 26 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls sauf le coefficient en haut à gauche qui à été obtenu ainsi :

$$8 = 2 + 3 \times 2$$

et :

$$26 = 2 + 3 \times 8 = 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2.$$

On a envie de penser que le coefficient en haut à gauche de M^r est :

$$2(1 + 3 + \ldots + 3^{r-1}) = 2\frac{3^r - 1}{3 - 1} = 3^r - 1,$$

et qu'on a :

$$M^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^r - 1 \\ 0 & 2^r & 0 \\ 0 & 0 & 3^r \end{pmatrix}.$$

Supposons que c'est le cas et multiplions cette matrice par M pour voir si la formule est correcte au rang $r + 1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^{r+1} - 1 \\ 0 & 2^{r+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{r+1} \end{pmatrix},$$

nous avons montré, par récurrence, que :

$$M^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^r - 1 \\ 0 & 2^r & 0 \\ 0 & 0 & 3^r \end{pmatrix}.$$

Correction 39

1. On applique la formule du produit matriciel. On commence par calculer le coefficient $\left(AE_{ij}\right)_{rs}$ d'indice (r,s) de la matrice AE_{ij}. Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{rk}\left(E_{ij}\right)_{ks}.$$

Or, le coefficient d'indice (k,s) de E_{ij} est nul sauf si $i=k$ et $s=j$. On en déduit que :

$$\left(AE_{ij}\right)_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq j \\ a_{ri} & \text{si } s = j. \end{cases}$$

On calcule maintenant le coefficient $(AE_{ij}B)_{rl}$ d'indice (r,l) de la matrice $AE_{ij}B$. Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(AE_{ij}\right)_{rk} b_{kl}.$$

Seul le terme d'indice $k=j$ est non-nul, on a donc :

$$(AE_{ij}B)_{rl} = a_{ri}b_{jl}.$$

2. Supposons par l'absurde que B et A sont non-nulles. Alors, il existe deux coefficients $a_{i_0 j_0}$ et $b_{i_1 j_1}$ non-nuls. On considère alors le produit matriciel $AE_{j_0 i_1}B$. Par hypothèse, ce produit matriciel est nul. Or, d'après le calcul précédent, le coefficient d'indice (i_0, j_1) de la matrice $AE_{j_0 i_1}B$ est égal à $a_{i_0 j_0} b_{i_1 j_1}$, il est donc nul ce qui est une contradiction. On a montré, par l'absurde, que A ou B est la matrice nulle.

Correction 40

Comme on a $(AX)^2 = (0)$ pour tout X, c'est vrai en particulier pour une matrice élémentaire. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors $(E_{ij}A)^2 = (0)$.

Explicitons la matrice $E_{ij}A$ puis son carré.

On écrit $A = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}E_{kl}$. Alors

$$E_{ij}A = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}E_{ij}E_{kl}.$$

Or pour $k \neq j$, $E_{ij}E_{kl} = (0)$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} a_{kl}E_{ij}E_{kl} = a_{jl}E_{il}$. Ainsi,

$$E_{ij}A = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il}.$$

Déterminons maintenant le carré de cette matrice :

$$(E_{ij}A)^2 = (E_{ij}A)(E_{ij}A) = (E_{ij}A)\sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{ij}AE_{il} \quad (1).$$

Pour un l quelconque, on a, d'après le travail effectué ci-dessus :

$$E_{ij}AE_{il} = \left(\sum_{r=1}^{n} a_{jr}E_{ir}\right)E_{il} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}E_{ir}E_{il}.$$

Or $E_{ir}E_{il} = (0)$ si $r \neq r$, on a donc

$$E_{ij}AE_{il} = a_{ji}E_{il}.$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$(E_{ij}A)^2 = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}a_{ji}E_{il}.$$

Cette matrice est nulle, par hypothèse. Tous ses coefficients doivent donc être nuls. On a donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\, a_{jl}a_{ji} = 0.$$

En particulier, on a $a_{ji}^2 = 0$ donc $a_{ji} = 0$. Ceci étant valable pour tout (i,j), on en déduit que A est la matrice nulle.

Correction 41

1. On écrit $A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}$. On a

$$AE_{kl} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{il}$$

car tous les termes pour $j \neq k$ sont nuls et $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$.

De même, on a

$$E_{kl}A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{kl}E_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}E_{kj}$$

car tous les termes pour $i \neq l$ sont nuls et $E_{kl}E_{lj} = E_{kj}$.

On a donc

$$AE_{kl} = \begin{pmatrix} & a_{1k} & \\ & a_{2k} & \\ (0) & \vdots & (0) \\ & a_{nk} & \end{pmatrix} \text{ et } E_{kl}A = \begin{pmatrix} & & (0) & \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ & & (0) & \end{pmatrix}$$

où seule la $l$ème colonne est non nulle pour AE_{kl} et seule la $k$ième ligne est non nulle pour $E_{kl}A$. Les deux matrices sont égales si leurs coefficients sont identiques c'est-à-dire :
— $a_{kk} = a_{ll}$ (le coefficient d'indice (k,l) des deux matrices)
— $a_{ik} = 0$ pour $i \neq l$ (les coefficients extra diagonaux de AE_{kl})
— $a_{lj} = 0$ pour $j \neq k$ (les coefficients extra diagonaux de $E_{kl}A$)

2. On suppose $A \in Z$. Alors A commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$. En particulier, elle commute avec toutes les matrices élémentaires. On a donc $AE_{kl} = E_{kl}A$ pour tout couple $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. D'après la question précédente, on en déduit que
— $a_{ik} = 0$ pour tout $i \neq l$, pour tout k, autrement dit, les coefficients extra diagonaux de la $k$ième colonne sont nuls. Ceci étant vrai pour tout k, la matrice est diagonale
— $a_{kk} = a_{ll}$ pour tout (k,l) donc tous les coefficients diagonaux ont la même valeur.

On en déduit que A est de la forme λI_n donc $Z = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$, soit l'ensemble des matrices scalaires.

Correction 42 On procède par récurrence double sur k. Pour tout entier k, on note $HR(k)$: "$\exists k \in \mathbb{R}, A^k + A^{-k} = \mu_k I_n$". Pour $k = 0$, on a $A^0 + A^{-0} = 2I_n$ donc HR(0) est vraie et $\mu_0 = 2$. Pour $k = 1$, on a $A + A^{-1} = I_n$ donc HR(1) est vraie et $\mu_1 = 1$.

Soit $k \geqslant 1$ un entier tel que $HR(k)$ et $HR(k-1)$ sont vraies. Montrons que $HR(k+1)$ est vraie.

On sait qu'il existe $\mu_k \in \mathbb{R}$ tel que $A^k + A^{-k} = \mu_k I_n$. On multiplie l'égalité par A d'une part, et par A^{-1} d'autre part. On obtient :
— $A^{k+1} + A^{-k+1} = \mu_k A$
— $A^{k-1} + A^{-k-1} = \mu_k A^{-1}$

donc en sommant les deux inégalités :

$$A^{k+1} + A^{-(k+1)} + A^{k-1} + A^{-(k-1)} = \mu_k (A + A^{-1}).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence au rang $k-1$, on obtient :

$$A^{k+1} + A^{-(k+1)} = \mu_k I_n - \mu_{k-1} I_n.$$

On a donc bien l'existence d'un réel μ_{k+1} tel que $A^{k+1} + A^{-(k+1)} = \mu_{k+1} I_n$.

De plus, $\mu_{k+1} = \mu_k - \mu_{k-1}$ donc, d'après l'étude des suites récurrentes d'ordre 2, on sait qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \mu_k = \alpha \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$. En utilisant $\mu_0 = 2$ et $\mu_1 = 1$, on obtient $\alpha = 2$ et $\beta = 0$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k + A^{-k} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) I_n.$$

Correction 43 Soit $r \in \mathbb{N}$. On pose $M_{ab} = bJ + (a-b)I$ avec J la matrice avec uniquement des 1. On sait que $\forall k \geqslant 1$, $J^k = n^{k-1}J$. On applique le binôme de Newton car I et J commutent :

$$\begin{aligned}(bJ + (a-b)I)^r &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} b^k J^k (a-b)^{r-k} \\ &= (a-b)^r I_n + \left(\sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} b^k n^{k-1} (a-b)^{r-k}\right) J \\ &= (a-b)^r I_n + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (bn)^k (a-b)^{r-k}\right) J \\ &= (a-b)^r I_n + \frac{1}{n}\left((bn + a - b)^r - (a-b)^r\right) J\end{aligned}$$