Devoir maison 3.

à rendre le 24 novembre pour les trinômes impairs

Exercice 1.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\frac{\pi}{N}}$. L'objectif de l'exercice est de calculer $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1}{1-\omega^k}$.

1. Déterminer l'ensemble des réels x tels que le nombre $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est bien défini.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. Montrer que $\dfrac{1}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
3. Que vaut $\text{cotan}(\pi - x)$, pour $x \in]0, \pi[$?
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2N-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2N}\right) = 0$.
5. Conclure sur la valeur de S_N.

Exercice 2.
Soit l'équation :

$$(E) : z^5 - 1 = 0.$$

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (E) sous forme trigonométrique.
2. On va maintenant déterminer l'expression des solutions de (E) avec des racines carrées:
   (a) Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$
   (b) Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:
   $$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c$$
   (c) Résoudre, en exprimant les solutions avec des racines carrées, l'équation :
   $$aZ^2 + bZ + c = 0$$
   d'inconnue Z.
   (d) Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en exprimant les solutions avec des racines carrées.
3. Des questions précédentes, déduire des expressions de:
$$\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5} \text{ et } \sin\frac{\pi}{5}$$