Correction du DM n 3

Exercice 1 1. Cet ensemble est $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$, puisqu'il s'agit des valeurs sur lesquelles la fonction sin ne s'annule pas.

2. On factorise par l'angle milieu au dénominateur :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-e^{i\theta}} &= \frac{1}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})} \\
&= \frac{1}{e^{i\theta/2}(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right))} \\
&= \frac{ie^{-i\theta/2}}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{i(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right))}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

3. Soit $x \in]0,\pi[$.

$$\text{cotan}(\pi - x) = \frac{\cos(\pi-x)}{\sin(\pi-x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} = \boxed{-\text{cotan}(x)}$$

4. Posons $T_N := \sum_{k=1}^{2N-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$, et pour $k \in [\![1, 2N-1]\!]$, $a_k := \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$, de sorte que

$$T_N = \sum_{k=1}^{2N-1} a_k.$$

On remarque alors que $a_1 = -a_{2N-1}$, $a_2 = -a_{2N-2}$, $a_3 = -a_{2N-3}$, et de façon générale

$$a_k = -a_{2N-k} \qquad \text{pour tout } k \in [\![1, 2N-1]\!]$$

car :

$$a_{2N-k} = \text{cotan}\left(\frac{(2N-k)\pi}{2N}\right) = \text{cotan}\left(\pi - \frac{k\pi}{2N}\right) = -\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2N}\right) = -a_k$$

En effet, comme $0 < k < 2N$, on a $0 < \frac{k\pi}{2N} < \pi$, et donc la relation de la question précédente s'applique.
De là, en appliquant le changement d'indice $j = 2N - k$ (pour $k = 1$, $j = 2N - 1$ et pour $k = 2N - 1$, $j = 1$), on obtient :

$$T_N = \sum_{k=1}^{2N-1} a_k = \sum_{j=1}^{2N-1} a_{2N-j} = \sum_{j=1}^{2N-1} (-a_j) = -T_N$$

D'où $T_N = -T_N$, c'est-à-dire $2T_N = 0$, et donc $\boxed{T_N = 0}$.

5. Pour tout $k \in [\![1, 2N-1]\!]$, on a $\omega^k = e^{i\frac{k\pi}{N}}$, et comme $0 < k < 2N$, on a $0 < \frac{k\pi}{N} < 2\pi$.
En particulier, $\frac{k\pi}{N} \not\equiv 0\ [2\pi]$. On peut donc appliquer $\dfrac{1}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ à $\theta := \frac{k\pi}{N}$, ce qui donne :

$$\frac{1}{1-\omega^k} = \frac{1}{1-e^{i\frac{k\pi}{N}}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1}{1-\omega^k} &= \sum_{k=1}^{2N-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{2N-1} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}_{=0} \\ &= (2N-1) \times \frac{1}{2} \\ &= \boxed{N - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 2 1. Il suffit d'écrire les racines cinquièmes de l'unité qui sont $e^{2ik\pi/5}$ pour k variant de 0 à 4.

2. (a) On a $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.
   (b) On développe tout le terme de droite et on met tout sur z^2; on obtient

$$\frac{a + 2az^2 + az^4 + bz^3 + bz + cz^2}{z^2} = \frac{az^4 + bz^3 + (2a+c)z^2 + bz + a}{z^2}$$

   Par identification, on trouve $a = 1 = b$ et $2a + c = 1$ donc $c = -1$.
   (c) On calcule le discriminant de l'équation en Z qui vaut 5, les solutions sont donc

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

   (d) On sait que z est solution de $Q(z) = 0$ si seulement si $z + \frac{1}{z}$ est solution de $Z^2 + Z - 1 = 0$. Les racines de Q sont donc les z vérifiant $z + \frac{1}{z} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ou encore les solutions de $z^2 - \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$. La première équation a pour discriminant $\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$, la deuxième $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$, les solutions recherchées sont donc $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ avec

$$z_1 = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

$$z_2 = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

$$z_3 = \frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$$

$$z_4 = \frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$$

3. On a $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$ donc les solutions de $Q(z) = 0$ sont les racines cinquièmes de l'unité différentes de 1, soit $e^{2ik\pi/5}$ pour $k = 1..4$. Pour pouvoir identifier les solutions sous forme trigonométrique avec celles données à la question précédente, nous observons le signe des parties réelles et imaginaires. On remarque que

   - $\mathcal{R}e(z_1) > 0, \mathcal{I}m(z_1) > 0$
   - $\mathcal{R}e(z_2) > 0, \mathcal{I}m(z_2) < 0$
   - $\mathcal{R}e(z_3) < 0, \mathcal{I}m(z_3) > 0$
   - $\mathcal{R}e(z_4) < 0, \mathcal{I}m(z_4) < 0$

   Comme $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ sont positifs donc $e^{2i\pi/5} = z_1$ donc

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5}}}{4}$$

   De même, on a $\dfrac{4\pi}{5} \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ donc $\cos\dfrac{4\pi}{5} < 0$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5} > 0$, on a donc $e^{4i\pi/5} = z_3$ donc

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5} \text{ et } \sin\dfrac{4\pi}{5} = \sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$$

   Enfin, $\cos\dfrac{\pi}{5} = -\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{\pi}{5} = \sin\dfrac{4\pi}{5}$.