Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2025-2026
DM 5

Devoir maison 5.
Ce devoir n'est pas à rendre.

Je vous invite à aller pratique le calcul sur le cahiers de calcul maths expertes :

> Page web du *Cahier de calcul*,
> dernières versions

je vous ai mis le pdf sur cahier de prépa. Il y a notamment pas mal d'exercices sur les complexes. Je vous ajoute quelques exercices pour (re)pratiquer les DL/sommes/produits:

Exercice 1.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 2.
Déterminer la limite en $+\infty$ (ou un développement en $\underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ si on se sent plus à l'aise) de $\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}$.

Exercice 3.
Déterminer un DL1 en 0 de $\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.

Exercice 4.
Déterminer un DL2 en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$

Exercice 5.
Donner un équivalent en 0 de $\dfrac{1}{x-\sin(x)}-\dfrac{1}{x-\operatorname{sh}(x)}$.

Exercice 6.
Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k}\right)$.

Exercice 7.
Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^\star$. On pose $P=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$.

1. Calculer $(1-a)P$.
2. En déduire une expression de P.

Exercice 8.
Soit n, p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant n$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \prod_{r=1}^{p} (r+k)$

Exercice 9.

1. Calculer $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

2. Calculer $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i$.

3. Calculer $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$ puis $\displaystyle\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} i$

4. Vérifier la cohérence avec la question 2.

5. Calculer $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$ puis $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$s