Correction du DM n 5

Exercice 1 On écrit

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} &= exp\left(x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\right)\\ &= exp\left(x\ln(x)\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)}\right)\right)\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)}=0$ donc $\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x\ln(x)}$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$.

On en déduit que $x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\underset{+\infty}{\sim}1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)=1$ donc, par continuité de l'exponentielle, $exp\left(x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)\right)=e$.

Exercice 2 On écrit $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=exp\left(x^2\ln\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=exp\left(x^2\ln\left(1+\left(\operatorname{ch}\frac{1}{x^2}-1\right)\right)\right)$. On a $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x^4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)-1=0$ donc $\ln\left(1+\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right)\right)\underset{+\infty}{\sim}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x^4}$. On en déduit que $x^2\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=0$ puis, par continuité de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=1$.

Si on veut faire le développement en $\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on écrit :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} &= exp\left(x^2\ln\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= exp\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{2x^4}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)\\ &= exp\left(x^2\left(\frac{1}{2x^4}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)\\ &= exp\left(\frac{1}{2x^2}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= 1+\frac{1}{2x^2}\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0\end{aligned}$$

Exercice 3 On écrit

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)=-\frac{1}{6}+\underset{0}{o}(x)$$

Remarque : Pour obtenir un DL1, il faut se rappeler que $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\underset{0}{o}(x^4)$.

Exercice 4 On écrit

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{1+x}} &= e.e^{\sqrt{1+x}-1} \\
&= e.e^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= e\left(1+\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2\right) \\
&= e\left(1+\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= e+\frac{ex}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

Exercice 5 On écrit

$$\frac{1}{x-\sin(x)}-\frac{1}{x-\operatorname{sh}(x)}=\frac{1}{x^3/6+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}-\frac{1}{-x^3/6+\underset{x\to 0}{o}(x^3)},$$

puis

$$\frac{1}{x-\sin(x)}-\frac{1}{x-\operatorname{sh}(x)}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{6}{1+\underset{x\to 0}{o}(1)}+\frac{6}{1+\underset{x\to 0}{o}(1)}\right)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{12}{x^3}.$$

Exercice 6 Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $1+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{2}{k}=\dfrac{k^2+1+2k}{k^2}=\dfrac{(k+1)^2}{k^2}$. On reconnaît alors un produit télescopique: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(k+1)^2}{k^2}\right)=(n+1)^2$.

Exercice 7

1. On a

$$\begin{aligned}
(1-a)P &= (1-a)\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) \\
&= (1-a)(1+a)\prod_{k=1}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) \\
&= (1-a^2)(1+a^2)\prod_{k=2}^{n}\left(1+a^{2^k}\right) \\
&= (1-a^4)\prod_{k=2}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)
\end{aligned}$$

puis par récurrence immédiate, $(1-a)P=\left(1-\left(a^{2^n}\right)^2\right)=1-a^{2^{n+1}}$.

2. On en déduit que pour $a\neq 1$, $P=\dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1}a^k$. Pour $a=1$, on a $P=2^{n+1}$ (ce qui correspond à la valeur de la somme pour $a=1$!

Exercice 8

1. On utilise la relation de Pascal :

$$\forall k\in[\![p,n]\!],\binom{k}{p}=\frac{k+1}{p}-\binom{k}{p+1},$$

on reconnaît alors une somme télescopique :

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)=\binom{n+1}{p+1}-\binom{p}{p+1},$$

ce qui donne bien le résultat attendu puisque $\dbinom{p}{p+1}=0$.

2. On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{r=1}^{p}(r+k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(p+k)!}{k!}\\ &= \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{p+k}{p}\\ &= \frac{1}{p!}\sum_{j=p}^{n-1+p}\binom{j}{p}\\ &= \frac{1}{p}\binom{n+p}{p+1},\end{aligned}$$

en utilisant la question précédente.

Exercice 9 1. On a $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{j}=\frac{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} j}=1$ car, par symétrie des indices, $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i=\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$.

2. On écrit

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} i=\prod_{j=1}^{n}(n!)=(n!)^n.$$

3. On a

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} i=\prod_{j=1}^{n} j!.$$

On a également

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} i=\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n} i=\prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{n!}{j!}\right)=\frac{(n!)^{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} j!}.$$

4. On fait le produit des deux valeurs trouvées à la question précédente :

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i.\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} i=\prod_{j=1}^{n} j!\times\frac{(n!)^{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} j!}=n!\times(n!)^{n-1}=(n!)^n.$$

On retrouve bien que $\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i.\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} i=\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i$.

5. On écrit :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i.\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} j$$

On a

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} j=\prod_{i=2}^{n}\prod_{j=1}^{i-1} j=\prod_{i=2}^{n}(i-1)!=\prod_{i=1}^{n-1} i!,$$

On a donc

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=n!\left(\prod_{i=1}^{n-1} i!\right)^2.$$

Pour calculer l'autre produit, on peut écrire

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j. \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} i.$$

On a

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n} j = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n!}{(i-1)!}\right) = \frac{(n!)^n}{\prod_{i=1}^{n}(i-1)!} = \frac{(n!)^n}{\prod_{i=1}^{n-1} i!}.$$

On a donc

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \frac{(n!)^{2n-1}}{\left(\prod_{i=1}^{n-1} i!\right)^2}.$$

On peut aussi écrire

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \frac{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)},$$

et remarquer que $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \left(\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i\right)^2$. On retrouve le même résultat.