Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2025-2026
Feuille 11

TD 11 : Limites et continuité .

---

1 Calcul de limites

Exercice 1.
Calculer les limites des fonctions suivantes, lorsqu'elles existent et montrer qu'elles n'existent pas, le cas échéant, lorsque $x \to 0$ et $x \to +\infty$:

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x+1}$.
2. $f_2 : x \mapsto \sin(x)e^{-x}$
3. $f_3 : x \mapsto x^3\cos(x)$

Exercice 2.
A l'aide d'un changement de variable, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{s\to 1^+} \frac{(s-1)\ln(s-1)}{s^2} \qquad \lim_{t\to 0^+} t^2 e^{\frac{1}{t}}$$

Exercice 3.
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1} \end{array}\right.$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n})$.

Exercice 4.
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x} \end{array}\right.$. f admet-elle une limite en 0 ?

2 Utilisation de limites

Exercice 5.
Sans réaliser d'étude de fonction, montrer que les fonctions suivantes sont bornées sur leur ensemble de définition.

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t\ln t}{1+t^2} \end{array}\right. \quad \text{et } g : \left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t\sin(t-1)}{t-1}+\frac{t^2\cos t}{e^t} \end{array}\right.$$

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique telle $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f = 0$. Que dire de f ?

3 Étude de la continuité

Exercice 7.
La fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^{\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.$ est-elle continue ?

Exercice 8.
La fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}+\lfloor x\rfloor \end{array}\right.$ est-elle continue ?

Exercice 9.
La fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}+x \end{array}\right.$ est-elle continue ?

Exercice 10.
Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{e^{\arctan x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{array}\right.$, est-elle continue ?

4 Prolongement par continuité

Exercice 11.
L'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+2x)}{e^x-1} \end{array}\right.$ est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 12.
L'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{1/x} \end{array}\right.$ est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 13.
L'application $f : \left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)} \end{array}\right.$ est-elle prolongeable par continuité ?

5 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 14.
Montrer que si f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, alors f admet un point fixe.

Exercice 15.
Que dire d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne prend que des valeurs entières ?

Exercice 16.
Soit f une fonction continue telle que $|f| = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 17.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f([a,b]) \subset]a,b[$. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 18.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

6 Continuité sur un segment

Exercice 19.
Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

Exercice 20.
Soit f dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que f admet une limite l en $+\infty$. Démontrer que f est bornée.

Exercice 21.
Soient f, g deux fonctions continues sur $[0,1]$ et telles que g est strictement positive. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 22.
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans quel cas obtient-on un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$?

7 Résolution d'équation fonctionnelle

Exercice 23.
Soit f et g continues telles que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

Exercice 24.
Trouver toutes les fonctions continues en 0 telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{5}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Exercice 25.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

1. Montrer que pour tout x réel, on a $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$
2. Montrer que f est constante.

8 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 26.
Calculer les limites des fonctions suivantes, lorsqu'elles existent et montrer qu'elles n'existent pas, le cas échéant, lorsque $x \to 0$ et $x \to +\infty$:

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2}$.
2. $f_2 : x \mapsto \cos x \cos \dfrac{1}{x}$
3. $f_3 : x \mapsto x\sin(x)$

Exercice 27.
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor \end{array}\right.$ Étudier la limite de f en

1. 0
2. $\dfrac{1}{2}$
3. 2
4. $\dfrac{2}{3}$
5. $+\infty$
6. $-\infty$

Exercice 28.
Étudier la continuité de $f : x \mapsto x^2\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

Exercice 29.
La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est-elle continue ?

Exercice 30.
La fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\ln|x|)^4 \ln(1+x^4) \end{array}\right.$ est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 31.
La fonction $f : x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 32.
Peut-on prolonger par continuité l'application

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} [-1,+\infty[\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \end{array}\right. ?$$

Exercice 33.
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0,\frac{1}{2}]$ tel que $f(c)=f(c+\frac{1}{2})$.

Exercice 34.
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)=f(b)$. Montrer que la fonction $g(t)=f(t+\frac{b-a}{2})-f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a,\frac{a+b}{2}]$.

Exercice 35.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, c un réel, $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ qui vérifie $f(x)\neq c$ pour tout x dans I. Démontrer que $f<c$ ou $f>c$.

Exercice 36.
Soient f et g deux fonctions continues telles que $\forall x\in[0,1], f(x)>g(x)>0$. Montrer qu'il existe $\alpha>1$ tel que : $\forall x\in[0,1], f(x)>\alpha g(x)$.

Exercice 37.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0)=1$, $\lim\limits_{-\infty} f=0$ et $\lim\limits_{+\infty} f=0$.

1. Montrer qu'il existe $a>0$ tel que si $|x|>a$ alors $f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

9 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 38.
Soit $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injective; montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\phi(n)=+\infty$.

Exercice 39.
Soit $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijective, telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\phi(n)}{n}=\ell$. Calculer ℓ.

Exercice 40.
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction croissante. Démontrer que f est continue en 0 si et seulement la limite quand $n\to+\infty$ de $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est égale à $f(0)$. Ce dernier résultat est-il toujours vrai si f n'est plus supposée croissante?

Exercice 41.
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ croissante telle que $g:\left\{\begin{array}{ccc} R_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x}\end{array}\right.$ soit décroissante. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 42.
Soit f une fonction continue telle que $f(0)=f(1)$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, il existe $\alpha_n\in\mathbb{R}$ tel que $f\left(\alpha_n+\dfrac{1}{n}\right)=f(\alpha_n)$.

Exercice 43.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, montrer que f est constante.

Exercice 44.
Soit f une fonction continue et bijective de I sur $f(I)$ montrer que f est strictement monotone.

Exercice 45.
Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\sup\limits_{x\in[a,b]}(f)=\sup\limits_{x\in[a,b]}(g)$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $g(c)=f(c)$

Exercice 46.
Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2\ln(x)}{x-1}\end{array}\right.$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
   On note encore f le prolongement continu.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que (I_n) converge et donner sa limite.

Exercice 47.
Soient $f,g:[0,1]\to[0,1]$ continues telles que $f\circ g=g\circ f$.

1. Montrer que l'ensemble des points fixes de f admet un minimum et un maximum.
2. Montrer que si λ est un point fixe de f, alors $g(\lambda)$ aussi.
3. En déduire qu'il existe x tel que $f(x)=g(x)$.

Exercice 48.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 et telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(x^2)$, montrer que f est constante.

Exercice 49.
On cherche les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (P) :

$$(P):\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1. Montrer que si f vérifie (P), alors pour tout x réel, on a $\forall n\in\mathbb{N}, f(nx)=nf(x)$.
2. Montrer que si f vérifie (P), alors pour tout x réel, on a $\forall n\in\mathbb{Z}, f(nx)=nf(x)$.
3. Montrer que si f vérifie (P), alors pour tout $x\in Q$, on a $f(x)=xf(1)$.
4. En déduire les fonctions continues vérifiant (P).

Memo

1. Comment déterminer si une fonction admet ou non une limite ?

   (a) Utiliser les suites pour obtenir une contradiction

   (b) Utiliser le théorème de la limite monotone en regardant les variations de la fonction.

   (c) Utiliser le théorème de comparaison ou de minoration/majoration

2. Comment lever l'indétermination dans une limite ?

   (a) Utiliser le théorème de croissances comparées

   (b) Reconnaître un taux d'accroissement

   (c) Modifier l'expression (quantité conjuguée, factorisation...)

3. Comment déterminer une limite avec des puissances réelles ?
   Revenir à une exponentielle

4. Comment déterminer si une fonction est continue ?
   Calculer la limite en le/les point(s) qui pose(nt) problème et comparer avec la valeur de la fonction.

5. Comment déterminer si une fonction est prolongeable par continuité ?
   Calculer sa limite et regarder si elle existe ET si elle est finie

6. Comment déterminer si une équation de la forme $f(x) = g(x)$ admet une solution ?
   Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que $f - g$ s'annule.

7. Comment montrer qu'une fonction est bornée ?

   (a) Déterminer ses variations

   (b) Utiliser la continuité sur un segment

8. Comment déterminer les solutions d'une équation fonctionnelle ?
   Trouver des relations de récurrence et des valeurs particulières