Lycée du Parc
PCSI 842
DS 5

Année 2025-2026
Durée : 4h

Devoir d'entrainement 5.

Exercice 1.

Dans tout ce problème, A désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I - Une première méthode pour le calcul des puissances de A

On pose

$$J = A - 2I_3$$

1. Calculer J^2. En déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on distinguera deux cas).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\left(\alpha_n, \beta_n\right) \in \mathbb{R}^2$, que l'on déterminera, tel que $A^n = \alpha_n J + \beta_n I_3$.
3. Calculer l'inverse de A.
4. La formule trouvée pour A^n est-elle encore valable pour $n = -1$?

Partie II - Une autre méthode de calcul des puissances de A

5. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

6. Montrer que $AP = PD_A$ où $D_A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_A^n.
8. En déduire une écriture matricielle de A^n ne dépendant que de l'entier n.
9. Comparée l'expression trouvée à celle de la partie I.

Exercice 2.
Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par récurrence par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ soit constante et la déterminer.
2. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Montrer que sa limite est nulle en utilisant l'unicité de la limite.
3. On suppose que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > \sqrt{n}$. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et tend vers $+\infty$.
4. On suppose maintenant qu'il existe un entier k tel que $u_k \leqslant \sqrt{k}$.
   (a) Montrer que pour tout entier n strictement supérieur à k, $u_n < \sqrt{n}$.
   (b) En déduire la nature de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et sa limite si elle existe ?

   On introduit maintenant la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie de la manière suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{2^{k+1}}$.
5. Soit $\beta \in]0;1[$. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\beta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta^k$ converge et donner sa limite.
6. Exprimer $\dfrac{\ln u_n}{2^{n-1}}$ en fonction de a et v_{n-1} pour tout entier n.
   Indication : On pourra chercher une formule valable pour u_2, u_3, u_4 et u_5 puis la montrer par récurrence.
7. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout entier k, on ait
$$\frac{\ln k}{2^{k+1}} \leqslant M\left(\frac{2}{3}\right)^k$$
   Indication : utiliser les croissances comparées.
8. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée puis qu'elle converge.

Soit ℓ la limite de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

9. Énoncer la définition avec des ϵ de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
10. On suppose $\ln a < \ell$
    (a) montrer que
$$\exists \lambda > 0, \exists N \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant N \Rightarrow \ln a - v_n < -\lambda$$
    (b) En déduire que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
11. On suppose désormais que $\ln a > \ell$.
    (a) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ln a - v_n > \lambda$$
    (b) En déduire que $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in [0,1], f(x) = (x-1)^2$. On pose $g = f o f$.

   (a) Dresser le tableau de variation de f.

   (b) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0,1]$ que l'on notera α.

   (c) Dresser le tableaux de variations de g sur $\mathbb{R}$.

   (d) Déterminer les points fixes de g.

   (e) En déduire le signe de $g(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.

   Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 = a, \text{ et} \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

2. On suppose tout d'abord $a \in [0, \alpha[$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis w_n en fonction de v_n.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, \alpha[$.

   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer sa limite.

   (d) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

   (e) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

3. Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 \in]\alpha, 1]$?

4. (a) Montrer qu'il existe $a_1 < 0$ et $a_2 > 2$ tels que $g(a_1) = g(a_2) = 1$.

   (b) Montrer que l'on connaît la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 \in [a_1, a_2]$.

5. On suppose ici $u_0 \in [0, \alpha[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_n = \dfrac{\ln(4v_n)}{2^n}$.

   (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

   $$v_{n+1} = v_n^2(2 - v_n)^2 \text{ et } x_{n+1} - x_n = \frac{\ln(1 - \frac{v_n}{2})}{2^n}$$

   (b) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n < p$. Démontrer l'inégalité suivante : $\dfrac{\ln(1 - \frac{v_n}{2})}{2^{n-1}} \leqslant x_p - x_n \leqslant 0$.

   (c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L strictement négatif.

   (d) Démontrer que $x_n = L + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$

   (e) En déduire un équivalent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction du DS d'entrainement n 5

Correction 1 On pose
$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$$

Partie I - Une première méthode pour le calcul des puissances de A

On pose
$$J=A-2I_3$$
On a donc
$$J=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

1. On a $J^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&0&2\\2&0&2\end{pmatrix}$. On en déduit, par une récurrence immédiate, que $J^n=2^{n-1}J$ pour $n\geqslant 1$ et $J^n=I_3$ pour $n=0$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On écrit $A=J+2I_3$. On sait que J et I_3 commutent, on peut donc appliquer le binôme de Newton :
$$\begin{aligned}A^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k2^{n-k}\\ &= 2^nI_3+\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}2^{k-1}\right)J\\ &= 2^nI_3+\left(2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right)J\\ &= 2^nI_3+2^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-1\right)J\\ &= 2^nI_3+2^{n-1}\left(2^n-1\right)J\\ &= 2^nI_3+\left(2^{2n-1}-2^{n-1}\right)J\\ &= 2^nI_3+\frac{2^{2n}-2^n}{2}J\end{aligned}$$
On a donc $A^n=\alpha_nJ+\beta_nI_3$ avec $\alpha_n=\dfrac{2^{2n}-2^n}{2}$ et $\beta_n=2^n$.

   Là, ma question n'était pas suffisamment précise, certains l'ont fait par récurrence et ça répondait à la question, j'ai donc compté tous les points. Certains encore ne sont pas allés jusqu'au bout de la simplification de α_n mais comme ça répondait aussi à la question, je n'ai pas pénalisé. Assurez-vous toutefois de savoir appliquer Newton et simplifier la somme qui commence à 1, c'est du grand classique.
3. On a $A^{-1}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}3&0&-1\\-1&4&-1\\-1&0&3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{8}(4I_3-J)=\dfrac{1}{2}I_3-\dfrac{1}{8}J$.

4. On a $\dfrac{2^{-2}+2^{-1}}{2}=\dfrac{3}{8}$, $2^{-1}=\dfrac{4}{8}$ et $\dfrac{2^{-2}-2^{-1}}{2}=-\dfrac{1}{8}$. L'expression trouvée pour A^n est donc encore valable pour $n=-1$.

   Pour ceux qui n'avait pas explicité α_n et β_n, il suffisait de montrer que A^{-1} était bien une combinaison linéaire de I_3 et J.

Partie II - Une autre méthode de calcul des puissances de A

5. On pose

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

   Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}PX=Y\quad&\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_3&=y_1\\x_1+x_2&=y_2\\x_1+x_3&=y_3\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}x_1&=\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{1}{2}y_3&\quad L_1\leftarrow\dfrac{1}{2}(L_1+L_3)\\x_2&=-\dfrac{1}{2}y_1+y_2-\dfrac{1}{2}y_3&\quad L_2\leftarrow L_2-\dfrac{1}{2}L_1-\dfrac{1}{2}L_3\\-x_1&=-\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{1}{2}y_3&\quad L_3\leftarrow\dfrac{1}{2}(L_3-L_1)\end{cases}\end{aligned}$$

   On en déduit que P est inversible et $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

6. On a $AP=\begin{pmatrix}4&0&-2\\4&2&0\\4&0&2\end{pmatrix}$ puis $PD_A=\begin{pmatrix}4&0&-2\\4&2&0\\4&0&2\end{pmatrix}$ donc $PD_A=AP$ avec $D_A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

   Question sympa que vous pouviez faire même avec un P^{-1} faux (alors que ce qui nous intéresse est que $A=P^{-1}AP$

7. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $D_A^n=\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$

   Aucune justification attendue, c'est dans les propriétés du calcul matriciel

8. On a $A^n=\left(PD_AP^{-1}\right)^n=PD_A^nP^{-1}$. On a

$$PD_A^n=\begin{pmatrix}4^n&0&-2^n\\4^n&2^n&0\\4^n&0&2^n\end{pmatrix}$$

   puis

$$PD_A^nP^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{4^n+2^n}{2}&0&\dfrac{4^n-2^n}{2}\\\dfrac{4^n-2^n}{2}&2^n&\dfrac{4^n-2^n}{2}\\dfrac4^n-2^n2&0&\dfrac{4^n+2^n}{2}\end{pmatrix}$$

   On est sur du TRÉS classique!!!! à savoir faire les yeux fermés donc

9. On écrit
$$A^n = 2^n I_3 + \begin{pmatrix} \frac{4^n-2^n}{2} & 0 & \frac{4^n-2^n}{2} \\ \frac{4^n-2^n}{2} & 0 & \frac{4^n-2^n}{2} \\ \frac{4^n-2^n}{2} & 0 & \frac{4^n-2^n}{2} \end{pmatrix} = 2^n I + \frac{4^n-2^n}{2} J$$
On retrouve bien l'expression trouvée à la partie I.

Correction 2 Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par récurrence par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, a = \frac{a^2}{\sqrt{n}}$. On a donc, pour $n = 1$, $a^2 = a$ donc $a = 0$ ou $a = 1$. Pour $n = 2$, $\sqrt{2}a = a^2$, ce qui impose $a = 0$. Réciproquement, si $a = 0$, la suite nulle vérifie bien $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}$. Il y a donc bien une unique valeur de a pour laquelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante.
   La plupart d'entre vous est partie de u_n alors que l'on vous demande une condition sur u_1. Ceux qui ont pensé à mettre des quantificateurs sont arrivés à
   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ constante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^\star, a = 0 \text{ ou } a = \sqrt{n}$$
   et ont conclu en me disant que la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'était pas constante donc que l'on n'avait jamais $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = \sqrt{n}$. Cette assertion est juste. Problème, vous n'avez pas montré que cette assertion était un des cas. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 0$ ou $u_n = \sqrt{n}$ n'est pas la même chose que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = \sqrt{n}$
2. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite L. Alors $u_{n+1} \to L$. Or $\frac{u_n^2}{\sqrt{n}} \to 0$ donc, par unicité de la limite, $L = 0$.

   22 personnes m'ont écrit $u_{n+1} \to \frac{l^2}{\sqrt{n}}$ (ou l'équivalent). C'est vraiment une erreur lourde : la limite ne peut dépendre de n puisque vous avez fait tendre n vers $+\infty$.
3. On suppose que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > \sqrt{n}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$ Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} > 1,$$
   et $u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante. On a $u_1 > 1$ donc la suite ne peut converger en croissant vers 0, elle diverge donc vers $+\infty$.

   Si vous faites le quotient, il est indispensable de préciser AVANT que l'on ne divise pas par une quantité qui peut s'annuler. Pour conclure sur la monotonie de la suite, il faut préciser que (u_n) est positive (scoop : La suite de terme général $a_n = -\frac{1}{n+1}$ vérifie $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ et elle est pourtant croissante)
   On pouvait aussi faire la différence. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors
   $$u_{n+1} - u_n = u_n\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1\right).$$

On sait que $u_n > \sqrt{n}$ donc $\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1 > 0$ et $u_n > \sqrt{n} > 0$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
Par le théorème de minoration, la limite de la suite est $+\infty$.

Beaucoup d'entre vous oublient de parler du deuxième facteur.

4. On suppose maintenant qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u_k \leqslant \sqrt{k}$.
   (a) On va montrer que pour tout entier n supérieur à k, $u_n < \sqrt{n}$ par récurrence sur n. Pour tout $n > k$, on pose donc $HR(n)$: "$u_n < \sqrt{n}$". *Initialisation :* Au rang $k+1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{u_k^2}{\sqrt{k}} \\ &\leqslant \sqrt{k} \\ &< \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

   La propriété est donc vraie au premier rang. On suppose maintenant qu'elle est vraie pour un certain entier $n > k$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} \\ &\leqslant \sqrt{n} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &< \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

   et la propriété est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n > k$.
   (b) D'après la question précédente, on a, pour tout $n > k$, $u_n < \sqrt{n}$ donc, u_n étant positif, $u_n^2 \leqslant u_n\sqrt{n}$ puis $u_{n+1} \leqslant u_n$.

   Comme vous écrivez des inégalités sans préciser pour quelles valeurs de n, beaucoup ont écrit $u_{n+1} - u_n < 0$ et en on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ était décroissante ce qui est faux. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est seulement décroissante à partir du rang k
   On en déduit que la suite est décroissante à partir du rang k. Comme elle est minorée par 0, elle converge et on a vu qu'elle ne pouvait converger que vers 0.

On introduit maintenant la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie de la manière suivante : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{2^{k+1}}$.

5. Soit $\beta \in]0;1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=1}^{n} \beta^k = \frac{\beta - \beta^{n+1}}{1-\beta}$ car $\beta \neq 1$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \beta^k = \frac{\beta}{1-\beta}$ car $\beta^{n+1} \to 0$ puisque $\beta \in]0,1[$

6. Exprimer $\frac{\ln u_n}{2^{n-1}}$ en fonction de a et v_{n-1} pour tout entier n.
Indication : On pourra chercher une formule valable pour u_2, u_3, u_4 et u_5 puis la montrer par récurrence. On a
— $\ln(u_2) = 2\ln(a)$,
— $\ln(u_3) = 2\ln(u_2) - \frac{1}{2}\ln(2) = 2^2\ln(a) - \frac{1}{2}\ln(2)$
— $\ln(u_4) = 2\ln(u_3) - \frac{1}{2}\ln(3) = 2^3\ln(a) - \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3)$.
— $\ln(u_5) = 2\ln(u_4) - \frac{1}{2}\ln(4) = 2^4\ln(a) - 2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(4)$
On a donc
— $\frac{\ln(u_2)}{2} = \ln(a)$.

— $\dfrac{\ln(u_3)}{2^2} = \ln(a) - \dfrac{1}{2^3}\ln(2)$

— $\dfrac{\ln(u_4)}{2^3} = \ln(a) - \dfrac{1}{2^3}\ln(2) - \dfrac{1}{2^4}\ln(3)$

— $\dfrac{\ln(u_5)}{2^4} = \ln(a) - \dfrac{1}{2^3}\ln(2) - \dfrac{1}{2^4}\ln(3) - \dfrac{1}{2^5}\ln(4)$

On intuite donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = 2^{n-1}\left(\ln(a) - v_{n-1}\right)$. On le montre par récurrence sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $HR(n)$: " $\ln(u_n) = 2^{n-1}\left(\ln(a) - v_{n-1}\right)$ ". La propriété est vraie au rang 2 (et même aux rangs 3,4 et 5!). Soit n un entier tel que $HR(n)$ est vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) &= 2\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(n) \\
&= 2\left(2^{n-1}\left(\ln(a) - v_{n-1}\right)\right) - \frac{1}{2}\ln(n) \\
&\text{par hypothèse de récurrence} \\
&= 2^n\ln(a) - 2^n v_{n-1} - \frac{1}{2}\ln(n) \\
&= 2^n\ln(a) - 2^n\left(v_{n-1} + \frac{\ln(n)}{2^{n+1}}\right) \\
&= 2^n\ln(a) - 2^n v_n
\end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

L'énoncé vous suggère de calculer les premiers termes. Premier écueil : j'ai vu beaucoup de $u_2 = \dfrac{u_1^2}{\sqrt{2}}$ *ce qui est faux car* u_2 *correspond à* $n = 1$.

Ensuite, l'énoncé vous demande une formule pour $\dfrac{\ln(u_n)}{2^{n-1}}$ *ce qui signifie, sauf à croire le concepteur sadique, que c'est plus simple que de trouver une expression de* u_n *(et donc pourquoi certains ont cherché une expression de* u_n *avec des produits????)*

7. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout entier k, on ait

$$\frac{\ln k}{2^{k+1}} \leqslant M\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Indication : utiliser les croissances comparées.

On a

$$\frac{\ln(k)}{2^{k+1}} \leqslant M\left(\frac{2}{3}\right)^k \Leftrightarrow \frac{\ln(k)}{2\times(4/3)^k} \leqslant M.$$

On a $\dfrac{\ln(k)}{2\times(4/3)^k} \to 0$ par croissances comparées car $\dfrac{4}{3} > 1$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln(k)}{2\times(4/3)^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc M tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{\ln(k)}{2\times(4/3)^k} \leqslant M.$$

En multipliant l'inégalité par $\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$, on obtient l'inégalité souhaitée.

Certains ont pensé à diviser pour montrer que le quotient tendait vers 0 *mais conclure " donc elle est majorée" ne peut suffire! Dites-moi qu'une suite convergente est majorée! ou bien prenez* $\epsilon = 1$ *et vous appliquez la définition de limite nulle.*

8. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée puis qu'elle converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\ln k}{2^{k+1}} \leqslant M\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$ donc, en sommant ces inégalités, on obtient

$$v_n \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Or, d'après la question 5, comme $\dfrac{2}{3} \in]0,1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$ converge donc elle est bornée. On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{\ln(n+1)}{2^{n+2}} \geqslant 0$ donc la suite est croissante. Par le thm de convergence monotone, on en déduit qu'elle converge.

J'ai encore vu le passage à la somme avec une équivalence... mais ce qui m'a fait le plus mal, c'est le nombre effarant de personnes qui me disent que la suite est majorée après une inégalité dont le membre de droite dépend de n !!!

Soit ℓ la limite de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

9. Énoncer la définition avec des ϵ de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
   $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geqslant N, |v_n - \ell| < \epsilon$.
10. On suppose $\ln a < \ell$

    il existe ϵ au lieu de $\forall\epsilon$, c'est faux et ne pas préciser $\forall\epsilon$ AVANT, c'est faux aussi. En effet, le rang N dépend de ϵ, il est donc impératif de le fixer avant de parler de l'existence de N.

    (a) Montrons que
    $$\exists \lambda > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \ln a - v_n < -\lambda$$
    On pose $\epsilon = \ell - \ln(a) > 0$ et on applique la définition de limite avec $\dfrac{\epsilon}{2}$, on sait alors qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |v_n - \ell| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $\ell - v_n < \dfrac{\epsilon}{2}$. En écrivant $\ln(a) - v_n = \ln(a) - \ell + \ell - v_n = -\epsilon + \ell - v_n$, on obtient
    $$\ln(a) - v_n < -\epsilon + \frac{\epsilon}{2}$$
    donc
    $$\ln(a) - v_n < -\frac{\epsilon}{2}.$$
    En posant $\lambda = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, on a bien le résultat souhaité.

    (b) En déduire que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
    D'après la question précédente, on sait qu'il existe $\lambda > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\ln(a) - v_n < -\lambda$ donc
    $$\forall n > N, n-1 \geqslant N \text{ donc } \ln(a) - v_{n-1} < -\lambda,$$
    et comme $\ln(u_n) = 2^{n-1}\left(\ln(a) - v_{n-1}\right)$, on a donc
    $$\forall n > N, \ln(u_n) < -2^{n-1}\lambda.$$
    Par le thm de majoration, $\ln(u_n) \to -\infty$ donc $u_n \to 0$
11. On suppose désormais que $\ln a > \ell$.

    (a) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que
    $$\forall n \in \mathbb{N}, \ln a - v_n > \lambda$$
    On sait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante, elle est donc majorée par sa limite ℓ. On pose $\lambda = \dfrac{\ln(a) - \ell}{2}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\ln(a) - v_n \geqslant \ln(a) - \ell > \lambda$.

(b) En déduire que $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

D'après la question précédente, on sait qu'il existe $\lambda > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\ln(a) - v_n > \lambda$ donc

$$\forall n \geqslant N, \ln(u_n) > 2^{n-1}\lambda.$$

Par le thm de minoration, $\ln(u_n) \to \infty$ donc $u_n \to +\infty$

Correction 3

1. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ la fonction définie par : $\forall x \in [0,1], f(x) = (x-1)^2$. On pose $g = f o f$.*

   (a) *Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$*

   La fonction f est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = 2(x-1)$ donc f est décroissante sur $[0,1]$. On a

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0

   (b) *Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0,1]$. On le notera α*

   On a $f(x) - x = x^2 - 3x + 1$, c'est un polynôme de degré 2, de coefficient dominant positif et admettant pour racines $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. On a $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Attention, certains m'ont parlé d'injectivité de f pour justifier l'existence ou l'unicité de point fixe, cela n'a pas de sens ! Une fonction injective peut (ou pas) admettre un ou plusieurs points fixes

   (c) *Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$*

   On a $g(x) = (x(x-2))^2$ donc $g'(x) = 2(2x-2)x(x-2) = 4x(x-1)(x-2)$. On en déduit que

x	$-\infty$		0		α		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	α	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   L'erreur classique a été de me donner le tableau de variations sur $[0,1]$ et pas sur $\mathbb{R}$. J'en ai vu quelques uns échouer à me trouver le signe de la dérivée (pourquoi avoir développé ?!?!). Pensez à toujours regarder si 0, 1 ou -1 sont racines d'un polynôme lorsque vous cherchez à le factoriser.

   (d) *Déterminer les points fixes de g* On a $g(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow = x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = 0$ et comme les points fixes de f sont points fixes de g, on sait que $x^2 - 3x + 1$ divise g donc $g(x) = x(x-1)(x^2 - 3x + 1)$.

   On pouvait aussi remarquer que 0 et 1 sont racines évidentes du polynôme $g(x) - x$ et retrouver ainsi la factorisation. Les points fixes de g sont $0, 1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

   (e) *En déduire le signe de $g(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.*

   On a

$$g(x) - x = x(x-2)(x^2 - 3x + 1) = x(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha')$$

   avec $\alpha' = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

   On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		α		1		α'		$+\infty$
$g(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit $a \in [0,1]$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0 = a \in]0,\alpha[$ et $u_{n+1} = (u_n-1)^2$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

2. *On suppose tout d'abord $a \in [0,\alpha[$.*

(a) *Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis w_n en fonction de v_n.*

On a

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f\circ f(u_{2n}) = g(u_{2n}) = g(v_n)$$

et

$$w_n = u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(v_n)$$

Beaucoup d'erreurs sur cette question. Impossible de faire correctement le reste si on n'a pas vu que g va être la fonction qui définit v. Pour info, la réponse était donnée question 5a)

(b) *Montrer que $v_n \in [0,\alpha[, \forall n \in \mathbb{N}$.*

On remarque, d'après le tableau de variations de g, que $[0,\alpha[$ est un intervalle stable par g. On a $v_0 = u_0 \in]0,\alpha[$ par hypothèse, on suppose donc que v_n appartient à cet intervalle; alors $v_{n+1} = g(v_n)$ et comme $v_n \in]0,\alpha[$ par hypothèse de récurrence, on sait que $g(v_n) \in]0,\alpha[$. Ainsi, on a montré le résultat par récurrence.

J'ai accepté ceux qui m'ont dit $u_0 \in [0,\alpha[$ et $[0,\alpha[$ est stable par g donc car la récurrence est immédiate..

(c) *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer sa limite.*

On utilise maintenant la question **??**. On sait que $v_n \in]0,\alpha[$ pour tout n et $x \mapsto g(x)-x$ est négative sur $]0,\alpha[$ donc $v_{n+1} = g(v_n) < v_n$ et la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée puisque son support est inclus dans $[0,\alpha[$, elle est donc convergente. De plus, comme elle est décroissante, sa limite ℓ ne peut être égale à α donc $\ell \in [0,\alpha[$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ or $v_{n+1} = g(v_n)$ donc, par continuité de g, on a également $v_{n+1} \to g(\ell)$. Par unicité de la limite, on a $g(\ell) = \ell$ et comme $g(x) < x, \forall x \in]0,\alpha[$, on a nécessairement $\ell = 0$.

Attention, certains m'ont dit $v_n \in [0,\alpha[$ donc sa limite appartient à $[0,\alpha[$ ce qui est faux, en général. Si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,\alpha[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in [0,\alpha]$.

(d) *En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

On a remarqué que $w_n = f(v_n)$ et f est continue donc $w_n \to f(l) = f(0) = 1$. Il était inutile de montrer que (w_n) converge.

(e) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?*

Les suites (v_n) et (w_n) sont deux suites extraites de (u_n) et elles convergent vers des limites différentes, la suite (u_n) ne peut donc pas être convergente.

Inutile de me dire que les indices des deux suites recouvrent les entiers ! J'aurais la divergence de (u_n) même si ce n'était pas le cas.

3. *Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 \in]\alpha,1]$?*

Si $u_0 \in]\alpha,1]$, alors $u_1 \in [0,\alpha[$ donc, d'après l'étude précédente, on a (u_n) divergente. Seule Clara F. a remarqué qu'il était inutile de refaire toute l'étude.

4. (a) *Montrer qu'il existe $a_1 < 0$ et $a_2 > 2$ tels que $g(a_1) = g(a_2) = 1$.*

On a $g(\mathbb{R}_-^\star) = \mathbb{R}_+^\star$ donc 1 admet un antécédent a_1 par g dans $]-\infty,0[$. De même $g(]2,+\infty[) =]0,+\infty[$ donc il existe un antécédent $a_2 \in]2,+\infty[$ de 1 par g.

(b) *Montrer que l'on connaît la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 \in [a_1, a_2]$.*
Si $u_0 \in [a_1, a_2]$, alors $g(u_0) = u_2 \in [0,1]$. On sait que $(u_n) \in$ diverge si $u_0 \in [0,1]$ et $u_0 \neq \alpha$. Ce sera donc le cas chaque fois que $u_2 \in [0,1]$, $u_2 \neq \alpha$. Pour $u_2 = \alpha$, la suite est constante à partir du rang 2, elle est donc convergente.

5. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_n = \dfrac{\ln(4v_n)}{2^n}$.*

(a) *Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = v_n^2(2-v_n)^2$, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\ln(1-\frac{v_n}{2})}{2^n}$.*

On a déjà montré que $v_{n+1} = g(v_n) = v_n^2(2-v_n)^2$. Par ailleurs, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln(4v_{n+1}) - \dfrac{1}{2^n}\ln(4v_n) = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{\sqrt{4v_{n+1}}}{2v_n}\right) = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{2v_n(2-v_n)}{2v_n}\right) = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1-\dfrac{v_n}{2}\right)$

(b) *Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n < p$. Démontrer l'inégalité suivante : $\dfrac{\ln(1-\frac{v_n}{2})}{2^{n-1}} \leqslant x_p - x_n \leqslant 0$.*

On remarque tout d'abord que $x_p - x_n = \sum_{k=n}^{p-1} x_{k+1} - x_k = \sum_{k=n}^{p-1} \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{v_k}{2}\right)}{2^k}$. Comme $v_k > 0$, tous les termes de la somme sont strictement négatifs donc $x_p - x_n < 0$. De plus, ln est croissante et (v_n) décroissante donc $\ln\left(1-\dfrac{v_k}{2}\right) > \ln\left(1-\dfrac{v_n}{2}\right)$, $\forall k = n \dots p-1$ d'où

$$x_p - x_n > \sum_{k=n}^{p-1} \frac{\ln(\left(1-\dfrac{v_n}{2}\right)}{2^k} = \ln(\left(1-\frac{v_n}{2}\right)\sum_{k=n}^{p-1}\frac{1}{2^k}$$

On explicite maintenant la suite géométrique $\sum_{k=n}^{p-1}\dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{1-(1/2)^{p-n}}{1-1/2} = \dfrac{1-(1/2)^{p-n}}{2^{n-1}} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Enfin, on n'oublie pas que le ln est négatif donc la multiplication inverse les inégalités et on se retrouve avec $x_p - x_n > \dfrac{\ln(1-v_n/2)}{2^{n-1}}$.
On ne va pas se mentir, c'était un massacre.

(c) *En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L strictement négatif.*

La question précédente, appliquée à $p = n+1$ montre que (x_n) est décroissante. De plus, en l'appliquant à $n = 0$ et $p > 0$, on en déduit que $2\ln\left(1-\dfrac{v_0}{2}\right) < x_p - x_0$ donc $x_0 + 2\ln\left(1-\dfrac{v_0}{2}\right) < x_p$ et la suite est minorée donc convergente. On a vu que la suite (v_n) tend vers 0, donc, à partir d'un certain rang, elle est strictement inférieure à 1 ce qui implique que $x_n < 0$ à partir d'un certain rang. Comme (x_n) est, de plus, décroissante, sa limite ne peut être que strictement négative.

(d) *Démontrer que $x_n = L + o(\dfrac{1}{2^n})$ et en déduire un équivalent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

On revient à l'inégalité trouvée à la question a). On a la réécrit sous la forme

$$2\ln\left(1-\frac{v_n}{2}\right) < 2^n(x_p - x_n) < 0$$

On fixe n et on fait tendre p vers $+\infty$. On obtient alors $2\ln\left(1-\dfrac{v_n}{2}\right) < 2^n(L-x_n) < 0$ On peut maintenant faire tendre n vers $+\infty$ et par le théorème des gendarmes, on a $2^n(L-x_n) \to 0$ ce qui est équivalent à $x_n = L + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

(e) Comme $v_n = \frac{1}{4}e^{2^n x_n}$, on a $v_n = \frac{1}{4}e^{2^n L + o(1)} = \frac{e^{2^n L}}{4}.e^{o(1)} \sim \frac{e^{2^n L}}{4}$.

Attention, j'ai vu des $a \sim b$ implique $e^a \sim e^b$!!!!