

TD 12 : Dérivation.

1 Étude de la dérivabilité

Exercice 1.

Soit f définie par $f(x) = \frac{\operatorname{ch}x - 1}{x}$ et $f(0) = 0$, f est-elle dérivable?

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. le prolongement obtenu est-il de classe \mathcal{C}^1 ?

Exercice 3.

Étudier la dérivabilité sur \mathbb{R} et le caractère C^1 si elle est dérivable de

$$\begin{array}{ll} 1. \quad f : x \mapsto x|x| & | \\ 2. \quad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}. & \end{array}$$

Exercice 4.

Étudier la dérivabilité de f définie par $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$;

Exercice 5.

Que dire de la dérivée d'une fonction paire? impaire?

Exercice 6.

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 7.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 - x^2 e^x \end{cases}$

1. Montrer que la corestriction de f : $g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow]-\infty, 1] \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ est bijective.
2. Sur quel(s) intervalle(s) g^{-1} est-elle dérivable?
3. Déterminez $(g^{-1})'(1 - e)$.

Exercice 8.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit une fonction g sur $[0, 1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

A quelle(s) condition(s) la fonction g est-elle dérivable?

Exercice 9.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \left[\frac{1}{x} \right] \end{cases}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement est-il dérivable?

2 Résolution d'équation fonctionnelle

Exercice 10.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(x) = 0$. Montrer que f' est identiquement nulle.

Exercice 11.

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables, telle que

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

3 Théorème de Rolle

Exercice 12.

Soit $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable tel que $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 13.

Soit g deux fois dérivable sur $[0, 3]$ telle que $g(0) = g(3) = 0$ et $g'(1)g'(2) < 0$. Montrer que g'' s'annule.

4 Théorème des accroissements finis

Exercice 14.

Démontrer que pour tout x et y réels on a: $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

Exercice 15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Exercice 16.

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[5]{1+x}} \right).$$

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que $f(2x) = 2xf'(c)$.

Exercice 18.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 19.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' \leq 0$. Montrer que f est positive.

5 Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 20.

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^n sur leur ensemble de définition et déterminer leur dérivée n -ème :

- | | |
|---|--|
| 1. $f_1 : x \mapsto xe^{-x}$ | 5. $f_5 : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ |
| 2. $f_2 : x \mapsto x^2e^x$ | 6. $f_6 : x \mapsto \frac{1}{ax+b}$ |
| 3. $f_3 : x \mapsto (ax+b)^k$, avec $k \in \mathbb{N}$. | |
| 4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. | |

Exercice 21.

Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 2$:

$$(1+x^2) \arctan^{(n)}(x) + 2(n-1)x \arctan^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1) \arctan^{(n-2)}(x) = 0.$$

En déduire la valeur de $\arctan^{(n)}(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22.

Soit $f : x \mapsto (x+1)^n$, montrer que $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (1+x)^{n-k}$ si $k \leq n$.

Exercice 23.

Soit $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right)$.
2. En déduire les racines de $f^{(n)}$ pour tout $n \geq 1$.

6 Retour aux équation différentielle

Exercice 24.

Existe-t-il une solution non nulle de $xy'(x) + (1+x^2)y(x) = 0$ définie sur tout \mathbb{R} ?

Exercice 25.

Déterminer l'ensemble des solutions définies sur tout \mathbb{R} de $x^2y'(x) + y(x) = x^2 + x$.

Exercice 26.

Existe-t-il des solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation $(1-x)^2y'(x) = 2-x$? si oui, déterminez-les.

7 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 27.

Étudier la dérивabilité de $f : x \mapsto \cos \sqrt{x}$.

Exercice 28.

Étudier la dérivalibilité de $h : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$.

Exercice 29.

Étudier la dérivalibilité de $f : x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$.

Exercice 30.

Étudier la dérivalibilité de f définie par $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$;

Exercice 31.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x + x^3 \end{cases}$. Montrer que f est bijective, que sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable et déterminer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 32.

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 33.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que

$$f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

Exercice 34.

Calculer la dérivedée n -ème de la fonction $x \mapsto x^{n-1} \ln x$.

Exercice 35.

Calculer la dérivée n -ième de $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$.

Exercice 36.

Calculer la dérivée n -ième de $f : x \mapsto x^2(1+x)^n$.

Exercice 37.

Déterminer la dérivée n -ième de $g : x \mapsto e^x \cos(x)$.

Exercice 38.

Calculer de deux façons différentes la dérivée n -ième de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire une expression de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 39.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée n -ième de $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$.

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 40.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f(a)$ et $f'(b) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$, $f''(c) = f(c)$.

Exercice 41.

Soient a réel, $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que f admet une limite en $+\infty$ égale à $f(a)$. Démontrer qu'il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 42.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

Montrer que si f s'annule au moins deux fois, alors f' aussi.

Exercice 43.

Soit f une fonction dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Le résultat reste-t-il vrai si la limite de f' est non nulle?

Exercice 44.

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(x+1)}{x+1} - \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}.$$

Exercice 45.

Soit f bornée telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$. Montrer que $l = 0$.

Exercice 46.

Soit f deux fois dérivable, bornée telle que $f'' \geq 0$, montrer que f est constante.

Exercice 47.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(t)| \leq t$. Montrer que f est la fonction nulle.

Memo

- Comment déterminer si une fonction est dérivable?
 - Utiliser les thms généraux (somme, produit, composée, quotient)
 - Calculer la limite du taux d'accroissement
 - Utiliser le théorème de la limite de la dérivée
- Comment montrer que la dérivée s'annule?
 - Utiliser Rolle
- Comment majorer un taux d'accroissement?
 - Utiliser le théorème des accroissements finis
- Comment calculer la dérivée n -ième d'une fonction?
 - Faire une récurrence
 - Utiliser la formule de Leibniz