

## Réponses du TD n 13

**Réponse 2**  $P(X) = \sum_{j=1}^n \frac{(X-1)^j}{(j-1)!}$

**Réponse 3** 1.  $\ln(1+x)\cos(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

2.  $\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

3.  $\sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$ .

4.  $xe^{2x+1} = ex + 2ex^2 + 2ex^3 + o(x^3)$ .

5.  $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + o(x^3)$ .

6.  $\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ .

**Réponse 4**  $\arctan(x^3) = \frac{\pi}{4} + \frac{3(x-1)}{2} - \frac{3(x-1)^2}{4} - \frac{3(x-1)^3}{4} + o((x-1)^3)$ .

**Réponse 5**  $\sin(\ln(1+x)) - \ln(\sin(x)+1) \sim \frac{x^4}{12}$ .

**Réponse 6** oui.

**Réponse 7**  $f'(0) = 0$ .

**Réponse 8** 1.  $-\frac{1}{2}$ .

2.  $\frac{1}{2}$ .

3.  $-\frac{1}{2}$ .

4.  $-1$ .

5.  $0$ .

6.  $-\frac{1}{6}$ .

**Réponse 9**  $\frac{2}{x^3}$

**Réponse 10**  $e^2$

**Réponse 11**  $f^{(6k+3)}(0) = (6k+3)!(-1)^k$  et  $f^{(n)}(0) = 0$  si  $n \notin \{6k+3, k \in \mathbb{N}\}$ .

**Réponse 12**  $f'(0) = 0$  et  $f''(0) = -1$

**Réponse 13**  $y = \ln(2) + \frac{(x-1)}{2}$  et la tangente est au-dessus de la courbe.

**Réponse 14**  $y = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4}$  et la courbe est au-dessus de la tangente.

**Réponse 15**  $f(x) = \frac{1}{2}x \left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$ ,  $f'(0) = \frac{1}{2}$ . La tangente est donc en dessous puis au-dessus du graphe.

**Réponse 16**  $\frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}} = 1 + t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{6} + o(t^4)$  et  $h(x) = F(x) - F(-x) = 2x + \frac{x^5}{15} + o(x^5)$ .

**Réponse 18**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Réponse 20**  $f^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

**Réponse 21** l'équation de la tangente est  $y = -x$ , la courbe est en dessous de la tangente. La droite d'équation  $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$  est une asymptote, la courbe est au-dessus.

**Réponse 22**  $y = x - 1$  est asymptote et le graphe est au-dessus de l'asymptote.

**Réponse 23**  $p(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$ .

**Réponse 24**  $\arctan(x^3) = x^3 + o(x^6)$

**Réponse 25**  $\sqrt{2-\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} + \frac{3x^3}{128} + o(x^3)$

**Réponse 26**  $\frac{1}{\cos \ln(1+x)} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

**Réponse 27**  $\cos(\pi x(1-x)) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + o\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$ .

**Réponse 28**  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$

**Réponse 29**  $f(x) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$

**Réponse 30**  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \sin x}} = \sqrt{2} + x\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{2}x^2}{8} + \frac{19\sqrt{2}x^3}{48} + o(x^3).$

**Réponse 31**  $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$

**Réponse 32**  $\tan(x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + o(x^5).$

**Réponse 33**  $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$

**Réponse 34**  $\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

**Réponse 35**  $\sin^6 x = x^6 + o(x^6)$

**Réponse 36**  $\ln(1 + \cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4).$

**Réponse 37**  $\frac{1}{1 + \sin x} = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$

**Réponse 38**  $\frac{\sqrt{1+x}}{1 + \operatorname{ch} x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32} + o(x^3).$

**Réponse 39**  $e^{3+x^2} = e^3 + e^3x^2 + \frac{e^3x^4}{2} + o(x^5).$

**Réponse 40** oui

**Réponse 41** oui

**Réponse 42**  $f$  est dérivable en 0 de dérivée  $-\frac{1}{2}$

**Réponse 43**  $\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} - e^{\frac{1}{2n^2}}}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)} \sim_0 n \rightarrow +\infty - \frac{1}{4n\sqrt{n}}$

**Réponse 44** -3.

**Réponse 45**  $\frac{7}{6}.$

**Réponse 46**  $\frac{3}{2e}$

**Réponse 47**  $\frac{7e}{12}$

**Réponse 48** -1.

**Réponse 49**  $\frac{1}{3}.$

**Réponse 50** -1

**Réponse 51**  $\frac{1}{2}$

**Réponse 52**  $-\frac{1}{6}$

**Réponse 53** 1

**Réponse 54**  $-\frac{1}{6}$

**Réponse 55** 1

**Réponse 56** 1

**Réponse 57**  $-\frac{1}{6}.$

**Réponse 58** -2.

**Réponse 59** 1

**Réponse 60**  $f'(0) = 0$

**Réponse 61** oui

**Réponse 62**  $f'(0) = -\frac{1}{2}$

**Réponse 63** l'équation de la tangente est  $y = e$ , la tangente est au-dessus de la courbe.

**Réponse 64** L'équation de la tangente est  $y = \frac{1}{3} - \frac{x}{9}$ , la courbe est au-dessus de la tangente.

**Réponse 65**  $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{96} + o(x^3)$

**Réponse 66** 1

**Réponse 67**  $f$  est dérivable.  $f(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$ . Le graphe de  $f$  admet un point d'inflexion en 1.

**Réponse 68**  $x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ .

**Réponse 69** le graphe de  $f$  admet pour asymptote la droite d'équation  $y = x+2$ , le graphe de  $f$  est au-dessus.

**Réponse 70**  $\arctan \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4x} - \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , la droite  $y = \frac{\pi}{4}$  est asymptote et le graphe est au-dessus.

**Réponse 71** 1.  $\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2y + 2y^2 + o(y^2)$  2.  $\arctan(X+1) - \frac{\pi}{4} \sim \frac{X}{2}$ . 3. La droite d'équation  $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi x}{4}$  est asymptote au graphe. 4. le graphe est en-dessous de l'asymptote.