

TD 13 : Développements limités.

1 DL et polynômes

Exercice 1.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Montrer que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(k)}(0) = k! a_k$.

Exercice 2.

Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n à coefficients réels tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(k)}(1) = k$.

2 Calcul de DL

Exercice 3.

Donner un DL à l'ordre 3 en zéro des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(1+x) \cos(x)$.
2. $x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$.
3. $x \mapsto \sin(2x)$.

4. $x \mapsto xe^{2x+1}$.
5. $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.
6. $x \mapsto \arctan(x)$

Exercice 4.

Déterminer un DL d'ordre 3 de $x \mapsto \arctan(x^3)$ en 1.

Exercice 5.

Déterminer un DL à l'ordre 4 de $f : x \mapsto \sin(\ln(x+1)) - \ln(\sin(x)+1)$ en 0. En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0.

3 Dérivabilité

Exercice 6.

Soit $f : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{\sin^2 x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement est-il dérivable?

Exercice 7.

Montrer que $f : x \mapsto \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$ est prolongeable par continuité. On note encore f son prolongement continu. Montrer qu'il est dérivable et donner $f'(0)$.

4 Calcul de limites et d'équivalents

Exercice 8.

Déterminer les limites suivantes en 0 :

1. $x \mapsto \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
2. $x \mapsto \frac{(x-1)e^x + 1}{x(e^x - 1)}$.
3. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2}$.

4. $x \mapsto \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1}$.
5. $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$.
6. $x \mapsto -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Exercice 9.

Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}$.

Exercice 10.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x + 1} \right)^x$.

5 Utilisation de l'unicité du DL

Exercice 11.

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^6}$. Déterminer la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n .

Exercice 12.

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(\cos x)}{1+x}$ définie sur $] -1, 1[$. Déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$.

6 Détermination de tangente et de la position de celle-ci

Exercice 13.

Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 14.

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Déterminer l'équation de la tangente à f en $x = 2$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 15.

Soit $f : x \mapsto \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$.

- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement.
- Montrer que f admet un DL à l'ordre 3 en 0 que l'on calculera.

3. Montrer que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
4. Que dire de la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0?

7 DL et intégrale

Exercice 16.

Soit $h : x \mapsto \int_{-x}^x \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

1. Déterminer un DL à l'ordre 4 en 0 de $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$.
2. En déduire un DL à l'ordre 5 en 0 de h .

Exercice 17.

Montrer que $\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt =_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

8 DL et suites

Exercice 18.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer que la suite est bien définie et déterminer sa limite.
2. Montrer que $u_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

9 Fonction réciproque et équation implicite

Exercice 19.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une unique solution x_ϵ dans \mathbb{R}_+ à l'équation $e^{-\epsilon x} = x$ d'inconnue x .
2. Montrer que $x_\epsilon =_{\epsilon \rightarrow 0} 1 - \epsilon + \frac{3\epsilon^2}{2} + o(\epsilon^2)$.

Exercice 20.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2\operatorname{sh}(x) - x \end{cases}$. Montrer que f est bijective et déterminer un DL4 de f^{-1} en 0

10 Développement asymptotique et asymptote

Exercice 21.

Soit $f : x \mapsto \frac{x\sqrt{2x^2+1}}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Donner l'équation de sa tangente en 0 et sa position relative par rapport au graphe de f .
2. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation et la position par rapport à la courbe.

Exercice 22.

Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1}e^{-1/x}$ admet une asymptote dont on précisera l'équation et la position de l'asymptote.

11 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 23.

Déterminer le DL d'ordre 6 en 0 de th.¹

Exercice 24.

Déterminer un DL à l'ordre 6 en 0 de $\arctan(x^3)$.

Exercice 25.

Déterminer le DL3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{2 - \sqrt{1-x}}$.

Exercice 26.

Déterminer le DL3 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\cos(\ln(1+x))}$.

Exercice 27.

Déterminer le DL3 en $\frac{1}{2}$ de $x \mapsto \cos(\pi x(1-x))$.

Exercice 28.

Soit $f : x \mapsto \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(x)}$. Déterminer un DL3 en 0 de f .

Exercice 29.

Soit $f : x \mapsto \cos x^x$. Déterminer un DL4 en 0 de f .

Exercice 30.

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \sin x}}$. Déterminer un DL3 en 0 de f .

Exercice 31.

Donner le DL en 0 à l'ordre 6 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

1. On rappelle que $\operatorname{sh} = \sinh / \cosh$.

Exercice 32.

Donner le DL en 0 à l'ordre 5 de $x \mapsto \sin(\tan(x))$.

Exercice 33.

Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto (\ln(1+x))^2$.

Exercice 34.

Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \exp(\sin(x))$.

Exercice 35.

Donner le DL en 0 à l'ordre 9 de $x \mapsto \sin^6(x)$.

Exercice 36.

Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln(1+\cos x)$.

Exercice 37.

Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{\cos x}{1+\sin x}$.

Exercice 38.

Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{1+\operatorname{ch} x}$.

Exercice 39.

Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto e^{3+x^2}$.

Exercice 40.

Soit f définie par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x}$ et $f(0) = 0$, f est-elle dérivable?

Exercice 41.

Soit f définie par $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$ et $f(0) = 0$, f est-elle dérivable?

Exercice 42.

Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \cos \sqrt{x}$.

Exercice 43.

Déterminer un équivalent de $\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - e^{\frac{1}{2n^2}}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)}$.

Exercice 44.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{\sqrt{1+2x} - \ln(1+x) - 1}$.

Exercice 45.

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\tan^2 x}$. Déterminer la limite en 0 de $f(x)$.

Exercice 46.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1-x}}{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}$.

Exercice 47.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

Exercice 48.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1)}{\sqrt{1+x^2} - 1}$.

Exercice 49.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$.

Exercice 50.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\cos(x) - 1}$.

Exercice 51.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\ln(1+x^2)} \right)$.

Exercice 52.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{x^2}$.

Exercice 53.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\arcsin x - \arctan x}$.

Exercice 60.

Calculer le DL à l'ordre 1 en 0 de f définie par $f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{3}{2}$. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

Exercice 61.

Soit $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{\sin^2 x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement est-il dérivable?

Exercice 62.

Calculer le DL à l'ordre 1 en 0 de f définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. En déduire que f est dérivable et donner $f'(0)$.

Exercice 63.

Soit $f : x \mapsto e^{\cos x}$. Déterminer l'équation de la tangente à f en $x = 0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 54.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(\sin(x)) - \operatorname{ch}(x)}{(\sin(x))^4}$.

Exercice 55.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$.

Exercice 56.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2}$.

Exercice 57.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x}$.

Exercice 58.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$.

Exercice 59.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^{\tan x}$.

Exercice 64.

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3 + \sin x}$. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 65.

Soit $f : x \mapsto x + \sin x$. Montrer que f est bijective et déterminer un DL3 en 0 de f^{-1} .

12 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 66.**

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 67.

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$, $\forall x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. Étudier la continuité et la dérивabilité de f sur \mathbb{R}^+ .
2. Déterminer un DL à l'ordre 3 de f en 1.
3. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?

Exercice 68.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.
3. Montrer que la suite converge vers 1.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que $y_n \sim -\frac{\ln(y_n)}{n}$ puis que $-\ln(y_n) \sim \ln(n)$.
5. En déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n .

Exercice 69.

Montrer que la fonction $x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de celle-ci par rapport au graphe de f .

Exercice 70.

Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ de $x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$.

Exercice 71.

On considère la fonction $x \mapsto x \arctan \frac{x}{x-1}$. On souhaite montrer qu'elle admet une asymptote en $-\infty$ et déterminer une équation de cette asymptote.

1. Déterminer un DL à l'ordre 2 de $\tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ en 0.
2. En déduire un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\arctan(X+1)$.

3. Déterminer l'équation de l'asymptote en $-\infty$ de la fonction.

4. Quelle est la position de l'asymptote par rapport au graphe de la fonction?

Memo

— Comment déterminer un développement limité?

— Utiliser les développements limités usuels

— Intégrer un développement limité en n'oubliant pas de déterminer la constante d'intégration (pour les rares cas où elle n'est pas nulle)

— Comment déterminer le développement limité d'un quotient?

Se ramener à un produit en faisant apparaître un quotient de la forme $\frac{1}{1+X}$ avec $X \rightarrow 0$.

— Comment déterminer une limite?

Déterminer un équivalent ou un DL

— Comment déterminer la position relative du graphe

par rapport à la tangente/asymptote? Étudier le signe du premier coefficient non nul d'ordre $k \geq 2$ du développement limité (ou du développement asymptotique dans le cas d'une asymptote).

— Comment déterminer un DL de f^{-1} quand on n'a pas l'expression? intégrer un DL de la dérivée, identifier les coefficients du DL de $f \circ f^{-1}$ ou utiliser un DL de f puis un changement de variable