Dérivabilité

1 Dérivée en un point, fonction dérivée

1.1 Définitions

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point intérieur à I.

Définition 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a si la limite quand x tend vers a de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On appelle alors nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, ce réel. La quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé taux d'accroissement.

Exemple 1. *$x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.*

Interprétation géométrique :
Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la corde reliant les points d'abscisse a et x du graphe de f. Quand f est dérivable, la corde se "rapproche" de la tangente au graphe en a dont le coefficient directeur vaut $f'(a)$.

Exemple 2. *Calculer la dérivée de $f_n(x) = x^n$ en $a \in \mathbb{R}$.*

Remarque. *Lorsque le taux d'accroissement admet une limite infinie lorsque x tend vers a, le graphe de f admet une tangente verticale en ce point (d'équation $x = a$).*

Définition 2. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Définition 3. Si $f : I \to \mathbb{R}$ avec a une extrémité de I (appartenant à I), on peut parler de dérivée à gauche ou à droite de f en a.

Exemples 3.

1. *Un polynôme est dérivable.*
2. *$x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.*

Définition 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On appelle fonction dérivée, notée f' la fonction qui à x associe $f'(x)$.

Proposition 1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, alors f est continue.

Définition 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité d'ordre 1 (ou DL1) en x_0 s'il existe des réels a, b tels que

$$f(x) = a + b(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0).$$

Remarque. *Cette expression n'a d'intérêt qu'au voisinage de x_0*

> **Proposition 2.**
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$, alors f admet un DL à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.

Remarque. *On a montré, de plus, que si $f(x) = a + b(x - x_0) + o(x - x_0)$, on peut identifier les coefficients a et b à $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.*

Exemple 4. On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \textit{si } x \neq 0 \\ 1 & \textit{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ *. Montrer que f est dérivable*

1.2 Propriétés

> **Proposition 3.**
> Soient f et g deux fonctions dérivables, $\lambda \in \mathbb{R}$.
>
> 1. λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
> 2. $f + g$ est dérivable et $(f + g)' = f' + g'$
> 3. fg est dérivable et $(fg)' = f'g + g'f$.
> 4. Si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

> **Proposition 4.**
> Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$; on suppose f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :
>
> $$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

> **Proposition 5.**
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, alors f est continue.

1.3 Signe de la dérivée et monotonie

Proposition 6.
Si f est dérivable sur un intervalle I. Alors

1. f est croissante ssi $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in I$.
2. Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, elle est strictement croissante sur I.
3. Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et f' n'est pas nulle sur un intervalle non réduit à un point, alors f est strictement croissante sur I.

On se souvient qu'il est impératif de travailler sur un intervalle!

Exemples 5.

1. *Considérons f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + 1 \text{ si } x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$. La dérivée sur $\mathbb{R}^\star$ est négative.*

   On a pourtant $f(-1) = 0$ et $f(1) = 1$.

2. *$x \mapsto x^3$ est-elle strictement croissante?*

On en déduit :

Proposition 7.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle et de dérivée nulle, alors f est constante sur cet intervalle

⚠ Pensez à la fonction $x \mapsto \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$

1.4 Extrema locaux

Définition 6. On dit que f admet un minimum (respectivement maximum) local en a s'il existe un intervalle J centré en a tel que :

$$\forall x \in J, f(x) \geqslant f(a).$$

(respectivement $\forall x \in J, f(x) \leqslant f(a)$.).
On dit qu'elle admet un extremum local si elle admet un maximum ou un minimum local.

Proposition 8.
Soient a un point de I qui n'est pas une extrémité de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarques.

1. *On peut admettre un minimum local sans être dérivable (valeur absolue).*
2. *Le résultat est faux si a est une extrémité. $f = id|_{[0,1]}$.*
3. *La réciproque est fausse : $x \mapsto x^3$.*

1.5 Théorème de la limite de la dérivée

Rappel: On dit qu'une fonction est de classe C^1 si f est dérivable et sa dérivée est continue.

Théorème 9 (Théorème de la limite de la dérivée)**.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $f'(x)$ admet une limite finie en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$.

Remarque.
- *Si f vérifie les hypothèses du thm et est de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$, on aura alors que f est de classe C^1 sur I.*
- *Si $f'(x)$ n'admet pas de limite en a, cela ne signifie pas que f n'est pas dérivable en a ! On ne peut pas conclure, il faut revenir au taux d'accroissement.*

Exemples 6.

1. *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \textit{si } x \neq 0 \\ 1 & \textit{sinon} \end{cases}$.
2. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$

Proposition 10.
Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$ alors f n'est pas dérivable en a ET le graphe de f admet une tangente verticale en le point d'abscisse $x = a$.

1.6 Dérivabilité de la bijection réciproque

Proposition 11.
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable, alors f^{-1} est dérivable sur l'ensemble $\{x \in J, f' \circ f^{-1}(x) \neq 0\}$ et, $\forall x \in J$ tel que $f' \circ f^{-1}(x) \neq 0$, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

Remarque. *Le graphe d'une fonction bijective et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Lorsque $f'(a)$ est nul, la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = a$ est horizontale donc en le point d'abscisse $x = f(a)$, la tangente au graphe de f^{-1} est verticale.*

2 Étude globale des fonctions dérivables

2.1 Théorème de Rolle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Théorème 12 (Théorème de Rolle)**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. On suppose* f *continue sur* $[a, b]$*, dérivable sur* $]a, b[$ *et telle que* $f(a) = f(b)$*. Alors, il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$*.*

Remarques. *1. si* $f(0) \neq f(1)$*,* f' *ne s'annule pas forcément (*$f = id|_{[0,1]}$*).*

2. Si f *pas continue sur* $[0, 1]$*,* f' *ne s'annule pas forcément* $f(x) = x$ *sur* $]0, 1]$ *et* $f(0) = 1$*.*

3. si pas dérivable : $g(x) = |x|$ *sur* $[-1, 1]$*.*

Exemple 7. *Soit* f *une fonction dérivable deux fois qui s'annule en trois points distincts. Alors sa dérivée seconde s'annule au moins une fois.*

Exercice 1. *Soit* $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *dérivable telle que* $\varphi(-1) = -1$*,* $\varphi(0) = 1$ *et* $\varphi(1) = 0$*. Montrer que* φ' *s'annule.*

2.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 13 (thm des accroissements finis)**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$*, dérivable sur* $]a, b[$*, alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interprétation géométrique :

Pour tout point a, b, on peut trouver un point du graphe en lequel la tangente au graphe est parallèle à la corde reliant les points d'abscisses a et b.

Remarque. *On peut désormais montrer le thm de la limite de la dérivée.*

Proposition 14 (inégalité des accroissements finis)**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$*, dérivable sur* $]a, b[$ *et telle que* $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leqslant k$*, alors* $\forall (x, y) \in [a, b]^2, x \neq y$*, on a*

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leqslant k.$$

Remarque: C'est le cas notamment lorsque f est de classe C^1 sur le segment $[a, b]$.

Corollaire 15.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Soit $k \geqslant 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leqslant k$.
2. $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

Exemples 8.

1. Montrer que pour tout $x > -1$*,* $\ln(1 + x) \leqslant x$*.*

2. Soit g *de classe* C^1 *telle que* $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} g'(x)$*. Montrer que* g *est lipschitzienne.*

Application: Application aux suites récurrentes.

On considère la suite réelle définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 1$.
2. Déterminer l'unique limite l possible.
3. Montrer qu'il existe un réel k tel que $|x_{n+1} - l| \leqslant k\,|x_n - l|$.
4. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3 Dérivées successives.

3.1 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
La dérivabilité p fois de f et sa dérivée p-ème sont définies par récurrence :

Définition 7. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose:

- $f^{(0)} = f$;
- $\forall k \in \{0, \dots, p-1\}, \quad f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.

On dit que f **est dérivable** p **fois en** $x_0 \in I$ lorsque le nombre $f^{(p)}(x_0)$ existe. La fonction $f^{(p)}$ est **la dérivée** p**-ème de** f.

Attention à ne pas confondre $f^{(p)}$ et f^p

Définition 8. On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^p$ lorsqu'elle est p fois dérivable et que sa dérivée p-ème $f^{(p)}$ est continue.
On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ lorsque, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^p$.

Détaillons pour les quelques premières valeurs de p:

- f est de classe $\mathcal{C}^0$ signifie que f est continue
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ signifie que f est dérivable et sa dérivée continue
- f est de classe $\mathcal{C}^2$ signifie que f est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est continue (sa dérivée première est aussi continue puisqu'elle est dérivable !)

Pour $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$:

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^q \implies f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p.$$

3.2 Calculs de dérivées p-ièmes

- Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Déterminer sa dérivée p-ième pour tout entier p.
- Pour tout entier p, déterminer la dérivée $p$ième de sin.
- Toute fonction polynomiale f de degré n vérifie :

$$\forall p \geqslant n+1, \quad f^{(p)} = 0.$$

3.3 Opérations.

Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Les ensembles :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^p(I,\mathbb{R}) &= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } p \text{ fois dérivable sur } I\} \\
\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}) &= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I\}
\end{aligned}$$

sont des sous-espaces vectoriels (spoiler) de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Si f et g sont deux vecteurs de l'un de ces deux ensembles avec $p \in \mathbb{N}$, alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f + \beta g)^{(p)} = \alpha f^{(p)} + \beta g^{(p)}.$$

On a

$$\mathcal{C}^p \subset \mathcal{D}^p \subset \mathcal{C}^{p-1} \subset \ldots \mathcal{C}^1 \subset \mathcal{D}^1 \subset \mathcal{C}^0$$

Remarque: Ces ensembles sont aussi stables par produit, et la dérivée du produit fg est donnée par la formule suivante.

Théorème 16 (Formule de Leibniz)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions p fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).*
Alors, la fonction $f \times g$ est également p fois dérivable sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^p$) avec, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$(f \times g)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}.$$

Remarque: Cette formule s'avère pratique notamment avec des fonctions polynomiales ou de dérivée k-ème s'exprimant simplement à l'aide de la fonction elle-même (exp, sin, cos, ...).

Exemples 9.

1. *Déterminer la dérivée p-ème de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$.*
2. *Écrire la dérivée p-ème de la fonction $x \mapsto x^3 \ln(x)$ en suivant le même raisonnement.*

On démontre également par récurrence la stabilité des ensembles ci-dessus par quotient et composition (en utilisant les formules connues pour les dérivées premières):

Proposition 17.
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions p fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).
On suppose de plus que g ne s'annule pas.
Alors, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est également p fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).

Proposition 18.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions p fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).
On suppose de plus que f est à valeurs dans J: $f(I) \subset J$.
Alors, la fonction $g \circ f$ est également p fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).

Remarque: L'hypothèse "$f(I) \subset J$" permet de donner un sens à la composée $g \circ f$.

⚠ Il n'y a pas de formule générale simple pour les dérivées p-ème de $\dfrac{f}{g}$ et $g \circ f$.

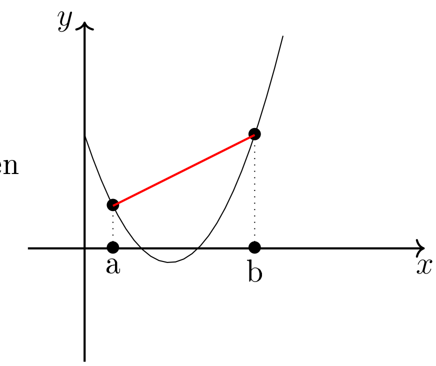
Proposition 19.
Soit f une fonction bijective p fois dérivable et telle que f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est p fois dérivable.

4 Fonctions convexes

Définition 9. On dit que f est une fonction convexe si pour tout $(x,y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

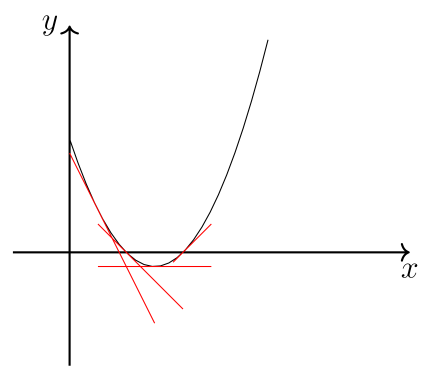
$$f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Interprétation géométrique: le graphe de f se situe en dessous de ses cordes:



Proposition 20.
Soit f une fonction dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Interprétation géométrique:
Une fonction f est convexe
si son graphe est au-dessus de ses tangentes.



Proposition 21.
Soit f une fonction deux fois dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f" est positive.

5 Fonctions complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ avec $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en un point a de I si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont dérivables en a. On note alors $f'(a) = \mathcal{R}e(f)'(a) + i\mathcal{I}m(f)'(a)$.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.