Limite et continuité

1 Limites

1.1 Définition de limite finie

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point ou une extrémité de I. on dit que f admet ℓ pour limite quand x tend vers x_0 si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

ou encore

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I, |f(x) - \ell| < \epsilon$$

> **Proposition 1.**
> La limite, si elle existe est unique.

> **Théorème 2.**
> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f admet une limite finie ℓ en x_0, alors $f(x_0) = \ell$.

Définition 2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$

- On dit que la limite à gauche de $f(x)$ quand x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}$ est ℓ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[, |f(x) - \ell| < \epsilon$$

  On note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

- On dit que la limite à droite de $f(x)$ quand x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}$ est ℓ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0, x_0 + \eta[, |f(x) - \ell| < \epsilon$$

  On note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Exemple 1. *Limite à gauche et à droite en $n \in \mathbb{Z}$ de la fonction partie entière.*

Définition 3. Si f n'est pas définie en x_0, on peut également définir une limite en x_0 (on parle de limite épointée): Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ avec I un invervalle. on dit que f admet ℓ pour limite quand x tend vers x_0 si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Remarque. *Si f admet une limite à droite et à gauche en x_0, elle admet une limite épointée en x_0.*

1.2 Définition de limites infinies

Définition 4.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si:

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si:

$$\forall A > 0, \exists B > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow f(x) > A$$

Remarque. *On peut définir la notion de voisinage d'un point $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ainsi:*

- *un intervalle centré en a si $a \in \mathbb{R}$*
- *un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp.$]-\infty, -A[$) si $a = +\infty$ (resp $a = -\infty$). On peut alors n'avoir qu'une seule définition de limite !*

1.3 Opérations sur les limites

Proposition 3.
Soient f et g deux fonctions, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l + l'$.
- Si f est bornée et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \pm\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ et $(l, l') \notin \{(0, \pm\infty), (\pm\infty, 0)\}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = ll'$
- Si f est bornée et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ avec $l \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.

On peut aussi composer les limites:

Proposition 4.
Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim\limits_{x\to y_0} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g \circ f(x) = l$.

Exemple 2. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin(x)} =?$.

1.4 Inégalités sur les limites

Proposition 5.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors

1. si $\ell > a$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) > a$.
2. Réciproquement, s'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) \geqslant a$, alors $\ell \geqslant a$.

Remarque. *Si $x_0 = \pm\infty$, on a une propriété analogue en remplaçant "$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$" par "$\forall x > A$" ou "$\forall x \leqslant -A$".*

Exemple 3. *Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, alors f est positive au voisinage de 0.*

Remarque. *On en déduit donc que si $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$, alors f et g sont de même signe au voisinage de a*

Proposition 6.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors f est bornée au voisinage de x_0.

Remarque. *On a un résultat analogue pour les suites. Dans le cas des suites, on en déduit que tous les termes de la suite sauf un nb fini de termes sont dans cet intervalle borné donc la suite est bornée. Ce n'est pas le cas avec les fonctions.*

Exemple 4. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$, *alors f est bornée au voisinage de 1 mais pas sur son ensemble de définition.*

Théorème 7.
Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ des fonction et $a \in I$ (donc $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), si au voisinage de a, on a

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

et g et h admettent la même limite en a, alors f admet une limite en a, égale à la limite commune de g et h

Remarque. *Si on autorise la limite à être infinie, avec la convention $-\infty < \alpha < +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ ce théorème donne aussi le théorème de minoration et de majoration.*

1.5 Lien avec les suites

Proposition 8.
Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit f une fonction telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ alors, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers x_0, la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

On utilise souvent cette proposition en contraposée: s'il existe deux suites (a_n) et (b_n) qui tendent vers x_0 et telles que $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers des limites différentes alors f n'admet pas de limite quand x tend vers x_0.

Exemples 5.
1. $f(x) = \sin x$, *f admet-elle une limite en* $+\infty$?

2. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. *Montrons qu'elle n'admet de limite en aucun point de* $\mathbb{R}$.

⚠ La réciproque est fausse !

Exemple 6. *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* x_0 *et la suite* $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* l*, cela ne signifie pas que la limite de* $f(x)$ *quand* x *tend* x_0 *existe/*

1.6 Théorème de la limite monotone

Définition 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- Si f est majorée sur I, alors l'ensemble $f(I)$ est majoré (non vide), il admet donc une borne supérieure. On la note
$$\sup_{x\in I} f(x) \text{ ou } \sup_I f$$
- Si f est minorée sur I, alors l'ensemble $f(I)$ est minoré (non vide), il admet donc une borne inférieure. On la note
$$\inf_{x\in I} f(x) \text{ ou } \inf_I f$$

Théorème 9 (thm de la limite monotone)**.** *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *tels que* $a < b$ *et* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction.*

- *Si f est croissante alors*
  - *Si f est majorée, f admet une limite finie en b et* $\lim_{x\to b} f(x) = \sup_I f$.
  - *Si f est minorée, f admet une limite finie en a et* $\lim_{x\to a} f(x) = \inf_I f$.
- *Si f est décroissante alors*
  - *Si f est majorée, f admet une limite finie en a et* $\lim_{x\to a} f(x) = \sup_I f$.
  - *Si f est minorée, f admet une limite finie en b et* $\lim_{x\to b} f(x) = \inf_I f$.

Proposition 10.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est croissante alors
  - Si f est non majorée, f admet une limite en b et $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.
  - Si f est non minorée, f admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Si f est décroissante alors
  - Si f est non majorée, f admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
  - Si f est non minorée, f admet une limite en b et $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$.

On en déduit qu'une fonction monotone admet une limite à gauche et à droite en tout point de son domaine de définition !

2 Continuité

2.1 Définition

Définition 6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est

- continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x<x_0 \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x>x_0 \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Remarques:

- Si f est continue à gauche et à droite en un point, elle est continue en ce point.
- Si $I = [a, b]$, on ne peut parler que de continuité à droite en a et à gauche en b.
- On a vu que si f admet une limite finie ℓ en x_0, alors $f(x_0) = \ell$, f est donc continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite finie en x_0.

Définition 7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Remarque. *Le programme se limite à la continuité sur un intervalle ce qui permet la définition intuitive de " f est continue si je ne lève pas mon crayon en traçant le graphe de f ".*

Exemples 7.

1. *Étudier la continuité de la fonction partie entière.*
2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$, est-elle continue?*
3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, est-elle continue?*

Proposition 11.
Le produit, la somme et la composée de fonctions continues est continue.
Le quotient d'une fonction continue par une fonction continue ET ne s'annulant pas est continue.

Définition 8. Soient f et g deux fonctions, on définit deux fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ en posant

$$\max(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \min(f,g)(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } f(x) \geqslant g(x) \\ f(x) \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque. *Si f et g sont continues,* $\max(f,g)$ *et* $\min(f,g)$ *sont aussi continues. En effet, on remarque que* $\max(f,g) = \dfrac{f+g}{2} + \left|\dfrac{f-g}{2}\right|$ *et* $\min(f,g) = \dfrac{f+g}{2} - \left|\dfrac{f-g}{2}\right|$

De même que pour les limites, on peut caractériser la continuité grâce aux suites:

Proposition 12.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, si f est continue en x_0 alors pour toute suite (a_n) telle que $a_n \to x_0$, $f(a_n) \to f(x_0)$.

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 13.
Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

cela ne signifie pas que c'est un intervalle de même nature

Exemple 8. *Quel est l'image que* $]-\pi,\pi[$ *par* $\sin$*?*

Théorème 14 (théorème des valeurs intermédiaires). *Soit f continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Corollaire 15.
Soit f une fonction continue ne s'annulant pas, alors f est de signe constant.

Corollaire 16.
Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(a) \neq f(b)$, alors pour tout y strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = y$.

Attention: je n'ai pas dit que c était unique ce qui est évidemment faux. exemple: $f = \cos, a = 0, b = 2\pi$.

Exemple 9. *Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue, alors f admet un point fixe.*

2.3 Continuité sur un segment

Définition 9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- Si l'ensemble $f(I)$ admet un maximum, on dit que f admet un maximum sur I et on le note
$$\max_{x\in I} f(x) \text{ ou } \max_I f$$
- Si l'ensemble $f(I)$ admet un minimum, on dit que f admet un minimum sur I et on le note
$$\min_{x\in I} f(x) \text{ ou } \min_I f$$

Théorème 17 (continuité sur un segment (Admis))**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue (sur le segment $[a,b]$), alors f est bornée ET atteint ses bornes. Autrement dit, il existe $(\alpha, \beta) \in [a,b]^2$ tel que

$$\forall x \in [a,b], f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta),$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$Im(f) = f([a,b]) = [f(\alpha), f(\beta)] \, .$$

Exemples 10.

1. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x) > 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que*
$$\forall x \in [0,1], f(x) > \alpha.$$
2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, montrer que f est bornée.*

2.4 Fonction k-lipschitzienne

Définition 10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est k-lipschitzienne si

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y| \, .$$

Si $k \in]0,1[$, on dit que f est contractante.

Exemples 11.

1. *$f : x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne.*
2. *Soit f une fonction contractante, l un point fixe de f et une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

Proposition 18.
Une fonction k-lipschitzienne est continue.

2.5 Continuité de la bijection réciproque

Théorème 19.
Soit f continue sur I et strictement monotone, alors f est injective. Elle induit donc une bijection de I sur $f(I)$, notons-la g. On a alors $g^{-1} : f(I) \to I$ continue, strictement monotone et de même monotonie que g.

Remarque. *Si f est continue et injective, alors elle est strictement monotone. Le résultat est hors programme mais on peut le montrer avec les outils de première année (cf td)*

2.6 Prolongement par continuité

Si une fonction n'est pas définie en un point x_0, on peut toujours la prolonger en imposant la valeur en ce point. Toutefois, si la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 existe et est réelle (ou seulement la limite à gauche ou à droite si c'est une borne de l'intervalle de définition), alors en imposant comme valeur cette limite, on obtient un prolongement de f, que l'on note $\tilde{f}$ (ou parfois f, par abus de notation) qui est continu.

Définition 11. On dit alors que f est prolongeable par continuité en posant $\tilde{f}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

⚠ On ne parle de prolongement par continuité d'une fonction qu'en un point où elle N'est PAS définie !!!

Exemples 12.

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
2. $f :]0, +\infty[, x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$.
3. *Soit* $f :]0, +\infty[, x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
4. $f :]0, +\infty[, x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Définition 12. Une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots a_n = b$ de $[a, b]$ telle que $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est continue et admet un prolongement continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.