

Développements limités

1 Formule de Taylor Young

Théorème 1.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable p fois sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Pour tout $x_0, x \in I$ et pour tout :

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^p)$$

Rappel: la notation $o((x - x_0)^n)$ signifie que ce terme divisé par $(x - x_0)^n$ tend vers 0 quand $x \rightarrow x_0$. Cette formule n'a donc d'intérêt qu'au voisinage de x_0 .

Elle sera très souvent appliquée en zéro:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^p)$$

Remarque: à l'ordre 1, on obtient $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$, on y reconnaît l'équation de la tangente en 0.

Exercice 1. Donner le DL en 0 à l'ordre 7 de $x \mapsto \tan(x)$.

Une fonction polynomiale :

On se donne $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Que vaut son DL en 0 pour $k \in \mathbb{N}$?

Fonction sinus :

On cherche à appliquer la formule de Taylor Young en 0 à la fonction sinus.

Exemple 1. calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x) - x^3}{x^4}$.

La fonction cos.

On cherche à appliquer la formule de Taylor Young en 0 à la fonction cosinus. Grâce au développement de cos, on est en mesure de calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

On cherche à appliquer la formule de Taylor Young en 0 à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Pour cela, on doit calculer les dérivées successives et les évaluer en 0.

La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour celle-là, la formule générale est compliquée à écrire à l'ordre n mais facile à calculer pour les premiers termes.

2 Développements limités

2.1 définition et opérations

Définition 1. Soit f une fonction, on dit qu'elle admet un développement limité (DL) d'ordre n en x_0 s'il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n).$$

Autrement dit, au voisinage du point x_0 , la fonction f peut être approximée par une fonction polynômiale et on sait majorer l'erreur de cette approximation (grâce au o).

Proposition 2.

Si une fonction admet un développement limité en x_0 , alors ce développement limité est unique

Remarque: Autrement dit, les coefficients du polynôme qui approxime la fonction sont uniques.

Opérations sur les DLs

1. Si f et g admettent un DL d'ordre n en x_0 , alors $f + g$ admet un DL d'ordre n en x_0 qui est la somme des DLs de f et g .
2. Si f admet un DL d'ordre n en x_0 , alors λf , avec $\lambda \in \mathbb{R}$ admet un DL d'ordre n en x_0 qui est le multiple de λ et du DL de f .
3. Si f et g admettent un DL d'ordre n en x_0 , alors fg admet un DL d'ordre n qui est égal au produit des DLs de f et g .

4. si f admet un développement limité d'ordre n en x_0 , $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$, alors toute primitive F de f admet un DL d'ordre $n + 1$ en x_0 tel que :

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{i=0}^n \frac{a_i(x - x_0)^{i+1}}{i + 1} + o((x - x_0)^{n+1}).$$

5. Si f admet un DL d'ordre n , f' n'admet pas nécessairement un DL d'ordre $n - 1$. En revanche, si f' admet un DL, alors ce dernier est la dérivée du DL de f .

Exemples 2.

1. Soit $f : x \mapsto x - \frac{x^3}{6} + x^4 \sin \frac{1}{x^4}$, montrer que f admet un DL3, f' admet-elle un DL2?

2. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin \left(\frac{1}{x} \right)$. On la prolonge par continuité en posant $f(0) = 0$. Montrer que f admet un DL2, f' admet-elle un DL1?

2.2 DL et Taylor Young

Théorème 3.

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0 , alors f admet un DL d'ordre n en x_0 .

En pratique, on applique Taylor Young pour déterminer les DLs des fonctions usuelles une bonne fois pour toutes. Ensuite, ces DLs sont supposés connus donc on les apprend par cœur et on les utilise sans les redémontrer pour déterminer le DL d'une fonction qui s'exprime à l'aide de fonctions usuelles.

2.3 Développements limites et dérivabilité

On a déjà vu (chapitre sur la dérivation) qu'une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un DL1.



C'est faux pour un ordre strictement supérieur à 1. Autrement dit, on peut admettre un DL2 et n'être pas deux fois dérivables.

Exemple 3. $f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$.

2.4 Propriétés des DLs

Rappel: si f est n fois dérivable, f' est $n - 1$ fois dérivable.

Proposition 4.

Soit une fonction n fois dérivable,

- Si f est une fonction paire alors son DL n'a que des termes pairs,
- Si f est une fonction impaire alors son DL n'a que des termes impairs.

Proposition 5.

Soit f admettant un DL en x_0 alors un équivalent en f en 0 est le premier terme non nul de son DL.

Remarque: Si $f(0) \neq 0$, alors $f(x) \sim f(0)$.

3 Développements usuels

En appliquant la formule de Taylor-Young aux fonctions usuelles qui sont \mathcal{C}^∞ , on obtient facilement les formules suivantes :

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$

Exemples 4.

1. *DLn en 0 de $\ln(1+x)$?*
2. *Déduire du DL1 de \sin son DL3 en 0.*
3. *Déterminer un DL3 de \tan en 0.*
4. *Déterminer un DL5 de $\arctan(x)$ en 0.*

4 Développement asymptotique

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^3+2}{x^2-1}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de celle-ci par rapport au graphe de f .

Exercice 2. Étude de $f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}e^{\sin(\frac{1}{x})} - 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.