Lycée du Parc
PCSI 842
Feuille 11

Année 2025-2026

TD 11 : Limites et continuité .

1 Calcul de limites

Exercice 1.
Calculer les limites des fonctions suivantes, lorsqu'elles existent et montrer qu'elles n'existent pas, le cas échéant, lorsque $x \to 0$ et $x \to +\infty$:

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x \ln(x)}{x+1}$.
2. $f_2 : x \mapsto \sin(x) e^{-x}$
3. $f_3 : x \mapsto x^3 \cos(x)$

Exercice 2.
A l'aide d'un changement de variable, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{s \to 1^+} \frac{(s-1)\ln(s-1)}{s^2} \qquad \lim_{t \to 0^+} t^2 e^{\frac{1}{t}}$$

Exercice 3.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f^{-1}(2^{-n})$.

Exercice 4.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x} \end{array} \right.$. f admet-elle une limite en 0 ?

2 Utilisation de limites

Exercice 5.
Sans réaliser d'étude de fonction, montrer que les fonctions suivantes sont bornées sur leur ensemble de définition.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t \ln t}{1+t^2} \end{array} \right. \text{ et } g : \left\{ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t \sin(t-1)}{t-1} + \frac{t^2 \cos t}{e^t} \end{array} \right.$$

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique telle $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f = 0$. Que dire de f ?

3 Étude de la continuité

Exercice 7.
La fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^{\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$ est-elle continue ?

Exercice 8.
La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ est-elle continue ?

Exercice 9.
La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} + x \end{array} \right.$ est-elle continue ?

Exercice 10.
Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{e^{\arctan x} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{array} \right.$, est-elle continue ?

4 Prolongement par continuité

Exercice 11.
L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left] -\dfrac{1}{2}, +\infty \right[^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+2x)}{e^x - 1} \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 12.
L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x e^{1/x} \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 13.
L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)} \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité ?

5 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 14.
Montrer que si f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, alors f admet un point fixe.

Exercice 15.
Que dire d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne prend que des valeurs entières ?

Exercice 16.
Soit f une fonction continue telle que $|f| = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 17.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f([a,b]) \subset]a,b[$. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 18.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

6 Continuité sur un segment

Exercice 19.
Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

Exercice 20.
Soit f dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que f admet une limite l en $+\infty$. Démontrer que f est bornée.

Exercice 21.
Soient f, g deux fonctions continues sur $[0,1]$ et telles que g est strictement positive. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 22.
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans quel cas obtient-on un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$?

7 Résolution d'équation fonctionnelle

Exercice 23.
Soit f et g continues telles que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

Exercice 24.
Trouver toutes les fonctions continues en 0 telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{5}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Exercice 25.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ayant une limite finie en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

1. Montrer que pour tout x réel, on a $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$
2. Montrer que f est constante.

8 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 26.
Calculer les limites des fonctions suivantes, lorsqu'elles existent et montrer qu'elles n'existent pas, le cas échéant, lorsque $x \to 0$ et $x \to +\infty$:

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2}$.
2. $f_2 : x \mapsto \cos x \cos \dfrac{1}{x}$
3. $f_3 : x \mapsto x\sin(x)$

Exercice 27.
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{array}\right.$ Étudier la limite de f en

1. 0
2. $\frac{1}{2}$
3. 2
4. $\frac{2}{3}$
5. $+\infty$
6. $-\infty$

Exercice 28.
Étudier la continuité de $f : x \mapsto x^2 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

Exercice 29.
La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est-elle continue ?

Exercice 30.
La fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\ln|x|)^4 \ln(1+x^4) \end{array}\right.$ est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 31.
La fonction $f : x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 32.
Peut-on prolonger par continuité l'application

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} [-1,+\infty[\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \end{array}\right. ?$$

Exercice 33.
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0,\frac{1}{2}]$ tel que $f(c)=f(c+\frac{1}{2})$.

Exercice 34.
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)=f(b)$. Montrer que la fonction $g(t)=f(t+\frac{b-a}{2})-f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a,\frac{a+b}{2}]$.

Exercice 35.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, c un réel, $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ qui vérifie $f(x)\neq c$ pour tout x dans I. Démontrer que $f<c$ ou $f>c$.

Exercice 36.
Soient f et g deux fonctions continues telles que $\forall x\in[0,1], f(x)>g(x)>0$. Montrer qu'il existe $\alpha>1$ tel que : $\forall x\in[0,1], f(x)>\alpha g(x)$.

Exercice 37.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0)=1$, $\lim\limits_{-\infty} f=0$ et $\lim\limits_{+\infty} f=0$.

1. Montrer qu'il existe $a>0$ tel que si $|x|>a$ alors $f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

9 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 38.
Soit $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ injective ; montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}\phi(n)=+\infty$.

Exercice 39.
Soit $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijective, telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\phi(n)}{n}=\ell$. Calculer ℓ.

Exercice 40.
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction croissante. Démontrer que f est continue en 0 si et seulement la limite quand $n\to+\infty$ de $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est égale à $f(0)$. Ce dernier résultat est-il toujours vrai si f n'est plus supposée croissante ?

Exercice 41.
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ croissante telle que $g:\left\{\begin{array}{ccc} R_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x}\end{array}\right.$ soit décroissante. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 42.
Soit f une fonction continue telle que $f(0)=f(1)$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, il existe $\alpha_n\in\mathbb{R}$ tel que $f\left(\alpha_n+\dfrac{1}{n}\right)=f(\alpha_n)$.

Exercice 43.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, montrer que f est constante.

Exercice 44.
Soit f une fonction continue et bijective de I sur $f(I)$ montrer que f est strictement monotone.

Exercice 45.
Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\sup\limits_{x\in[a,b]}(f)=\sup\limits_{x\in[a,b]}(g)$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $g(c)=f(c)$

Exercice 46.
Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2\ln(x)}{x-1}\end{array}\right.$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
   On note encore f le prolongement continu.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Montrer que (I_n) converge et donner sa limite.

Exercice 47.
Soient $f,g:[0,1]\to[0,1]$ continues telles que $f\circ g=g\circ f$.

1. Montrer que l'ensemble des points fixes de f admet un minimum et un maximum.
2. Montrer que si λ est un point fixe de f, alors $g(\lambda)$ aussi.
3. En déduire qu'il existe x tel que $f(x)=g(x)$.

Exercice 48.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 et telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(x^2)$, montrer que f est constante.

Exercice 49.
On cherche les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (P) :

$$(P):\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1. Montrer que si f vérifie (P), alors pour tout x réel, on a $\forall n\in\mathbb{N}, f(nx)=nf(x)$.
2. Montrer que si f vérifie (P), alors pour tout x réel, on a $\forall n\in\mathbb{Z}, f(nx)=nf(x)$.
3. Montrer que si f vérifie (P), alors pour tout $x\in Q$, on a $f(x)=xf(1)$.
4. En déduire les fonctions continues vérifiant (P).

Memo

1. Comment déterminer si une fonction admet ou non une limite ?

   (a) Utiliser les suites pour obtenir une contradiction

   (b) Utiliser le théorème de la limite monotone en regardant les variations de la fonction.

   (c) Utiliser le théorème de comparaison ou de minoration/majoration

2. Comment lever l'indétermination dans une limite ?

   (a) Utiliser le théorème de croissances comparées

   (b) Reconnaître un taux d'accroissement

   (c) Modifier l'expression (quantité conjuguée, factorisation...)

3. Comment déterminer une limite avec des puissances réelles ?
   Revenir à une exponentielle

4. Comment déterminer si une fonction est continue ?
   Calculer la limite en le/les point(s) qui pose(nt) problème et comparer avec la valeur de la fonction.

5. Comment déterminer si une fonction est prolongeable par continuité ?
   Calculer sa limite et regarder si elle existe ET si elle est finie

6. Comment déterminer si une équation de la forme $f(x) = g(x)$ admet une solution ?
   Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que $f - g$ s'annule.

7. Comment montrer qu'une fonction est bornée ?

   (a) Déterminer ses variations

   (b) Utiliser la continuité sur un segment

8. Comment déterminer les solutions d'une équation fonctionnelle ?
   Trouver des relations de récurrence et des valeurs particulières

Correction du TD n 11

Correction 1

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par le théorème de croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$ et $x \sim_{x\to+\infty} x+1$ donc $f_1(x) \sim \ln(x)$ ce qui implique $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.
2. On a $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)e^{-x} = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et sin est bornée donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$.
3. On a $\lim\limits_{x\to 0} x^3\cos(x) = 0$. En $+\infty$, la fonction n'a pas de limite. En effet, si on pose $a_n = 2n\pi$ et $b_n = 2n\pi+\pi$, on a $f_3(a_n) \to +\infty$ et $f_3(b_n) \to -\infty$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Correction 2

On a $\lim\limits_{s\to 1^+} \dfrac{(s-1)\ln(s-1)}{s^2} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t\ln(t)}{(1+t)^2} = 0$ par croissances comparées.

On a $\lim\limits_{t\to 0^+} t^2 e^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ par croissances comparées.

Correction 3

1. On a f strictement décroissante en tant que somme de fonctions strictement décroissantes donc f est injective. On a également $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ donc, par continuité de f, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. On a donc bien f bijective.
2. On sait que f^{-1} est continue puisque f l'est. On a $2^{-n} \to 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n}) = f^{-1}(0)$. Or $f(x) = 0 \Leftrightarrow x-1+x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ donc $f^{-1}(0) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n}) = \dfrac{1}{2}$.

Correction 4

On pose $x_n = \dfrac{1}{2n}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n+1}$, on a bien $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$ mais $f(x_n) = 2n$ et $f(y_n) = -(2n+1)$ qui tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$ donc f n'admet pas de limite en 0.

Correction 5

On a $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ par croissances comparées. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall t \in]0,\eta[$, $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t}$ car $\dfrac{1}{1+t^2} \sim \dfrac{1}{t^2}$. On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ par croissances comparées.

On en déduit qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall t > A$, $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. On peut choisir $A > 1$.

Par ailleurs, pour tout $t \in [\eta, A]$, on a $|\ln(t)| \leqslant \max\big(\ln(A), |\ln(\eta)|\big)$ et $1+t^2 \geqslant 1+\eta^2$ donc $|f(t)| \leqslant K'$ en posant $K' = \dfrac{A\max\big(\ln(A),|\ln(\eta)|\big)}{1+\eta^2}$. En posant $K = \max\left(\dfrac{1}{2}, K'\right)$, on a bien $\forall t > 0$, $|f(t)| \leqslant K$ donc f est bornée. On peut aussi dire que sur le segment $[\eta, A]$, la fonction f est continue donc bornée par un réel K'. On en déduit que f est bornée sur tout $]0,+\infty[$.

On a $\lim\limits_{t\to 1} g(t) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)\sin(x)}{x} + \dfrac{(x+1)^2\cos(x+1)}{e^{x+1}} \to 1 + \dfrac{\cos(1)}{e}$. Comme $1+\dfrac{\cos(1)}{e} < 2$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in]1, 1+\eta[$, $|g(t)| < 2$.

On ne peut calculer la limite en $+\infty$ car elle n'existe pas. Nous allons dire que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2\cos(t)}{e^t} = 0$ par croissances comparées et du fait que cos est borné. Il existe donc $A > 0$ tel que $\forall t > A$, $\left|\dfrac{t^2\cos(t)}{e^t}\right| < \dfrac{1}{2}$.

On a aussi $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{t-1} = 1$ donc il existe $A' > 0$ tel que $\forall t > A'$, $\left|\dfrac{t}{t-1}\right| < \dfrac{3}{2}$. On en déduit que pour tout $t > A'$, $\left|\dfrac{t\sin(t-1)}{t-1}\right| < \dfrac{3}{2}$.

Enfin, en posant $A" = \max(A, A')$, on a, pour tout $t > A"$, $|g(t)| \leqslant \left|\dfrac{t\sin(t-1)}{t-1}\right| + \left|\dfrac{t^2\cos(t)}{e^t}\right|$ par l'inégalité triangulaire donc $|g(t)| < 2$. On en déduit que f est bornée sur $]1, 1+\eta[$ et sur $]A", +\infty[$. Il reste à remarque que g est bornée sur le segment $[1+\eta, A"]$ car elle y est continue. Si on ne veut pas utiliser la continuité sur un segment, on peut écrire que $\forall t \in [1+\eta, A"]$, on a

$$|g(t)| \leqslant \left|\frac{t}{t-1}\right| + \left|\frac{t^2}{e^t}\right| \leqslant \frac{A"}{\eta} + \frac{A"^2}{e^\eta}.$$

La fonction g est donc bornée sur $]1, +\infty[$.

Correction 6

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $A > 0$ tel que $\forall x > A$, on ait $|f(x)| < \epsilon$. Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y + nT > A$, on a alors $f(y+nT) \in]-\epsilon, +\epsilon[$ donc $f(y) \in]-\epsilon, \epsilon[$ puisque $f(y) = f(y+nT)$. Ceci étant vrai pour tout réel ϵ, la fonction f est nulle.

Correction 7 On calcule la limite en 0^+. On écrit $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Par le théorème de croissances comparées, on a $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ ce qui montre que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.

Correction 8 Pour tout $x \notin \mathbb{Z}$, la fonction f est continue car la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors, pour tout $x \in [k-1, k[$, on a $\lfloor x \rfloor = k-1$ donc $f(x) = \sqrt{x-(k-1)} + (k-1)$ et $\lim_{x\to k^-} f(x) = k$.

Pour tout $x \in [k, k+1[$, on a $\lfloor x \rfloor = k$ donc $f(x) = \sqrt{x-k} + k$ et $\lim_{x\to k^+} f(x) = k$. Comme $f(k) = k$, on a bien f continue en k donc f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

Correction 9 Pour tout $x \notin \mathbb{Z}$, la fonction f est continue car la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors, pour tout $x \in [k-1, k[$, on a $\lfloor x \rfloor = k-1$ donc $f(x) = \sqrt{x-(k-1)} + x$ et $\lim_{x\to k^-} f(x) = k+1$.

Pour tout $x \in [k, k+1[$, on a $\lfloor x \rfloor = k$ donc $f(x) = \sqrt{x-k} + x$ et $\lim_{x\to k^+} f(x) = k$. On a $\lim_{x\to k^+} f(x) \neq \lim_{x\to k^-} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en k et n'est donc pas continue en k.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Correction 10 Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme, composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour étudier la continuité en 0, on écrit :

$$\frac{e^{\arctan x} - 1}{x} = \frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x} \times \frac{\arctan x}{x}.$$

On sait que $\frac{\arctan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et, comme $\lim_{x\to 0} \arctan x = 0$ et $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$, on a

$$\frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x} = 1.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc la fonction est bien continue.

Correction 11 On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ en déterminant un équivalent, la fonction est donc prolongeable par continuité en posant $f(0) = 2$.

Correction 12 On a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ par croissances comparées, l'application n'est donc pas prolongeable par continuité.

Correction 13 On pose $x = 1+y$, on a $f(x) = f(1+y) = \frac{\sqrt{1+y}-1}{\ln(1+y)} \sim \frac{y/2}{y}$. L'application est donc prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \frac{1}{2}$.

Correction 14 On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue.

La fonction f étant décroissante, elle admet une limite en $+\infty$ et une limite en $= -\infty$. Comme f est décroissante, sa limite en $-\infty$ ne peut être égale à $-\infty$. Sa limite est donc réelle ou vaut $+\infty$. Dans les deux cas, on a $\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$.

De même, la limite de f en $+\infty$ ne peut être égale à $+\infty$. La limite de $g(x)$ en $+\infty$ est donc égale à $-\infty$.

On en déduit que l'image de g est $\mathbb{R}$, 0 admet donc un antécédent par g, ce qui montre que f admet un point fixe.

Correction 15 On suppose par l'absurde que f n'est pas constante. Il existe alors deux réels a et b tels que $f(a) \neq f(b)$. On suppose, sans nuire à la généralité, que $f(a) < f(b)$. On a alors $f(a) + \frac{1}{2} < f(b)$ car $f(a)$ et $f(b)$ sont des entiers. La fonction f étant continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = f(a) + \frac{1}{2}$ ce qui est impossible car $f(a) + \frac{1}{2}$ ne peut pas être un entier.

Correction 16 La fonction f est continue et ne s'annule pas, elle est donc de signe constant. On en déduit qu'elle est constante égale à 1 ou à -1.

Correction 17 On pose $\phi : x \mapsto f(x) - x$. On a $\phi(a) = f(a) - a > 0$ et $\phi(b) = f(b) - b < 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, ϕ s'annule en un point c de $]a, b[$.

Correction 18 Par définition de la limite, il existe A tel que $\forall x \leqslant A$, $f(x) < -1$ donc il existe x tel que $f(x) < 0$. De même, comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe y tel que $f(y) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires qui s'applique puisque f est continue, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0$, donc f s'annule.

On peut aussi dire que f est continue donc l'image d'un intervalle est un intervalle. Comme $\lim_{-\infty} f = -\infty$, cet intervalle est non minoré et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ implique qu'il est également non majoré. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc f s'annule.

Les polynômes de degré impair de coefficient dominant strictement positif vérifient les hypothèses sur les limites, donc s'annulent. Pour ceux de coefficient dominant strictement négatif, leur opposé vérifie les hypothèses donc s'annule. Ceci est faux, en général, pour les polynômes de degré pair, par exemple regardez $f(x) = x^2 + 1$.

Correction 19 Soit $T > 0$ une période. Alors f est continue sur le segment $[0, T]$ donc bornée. Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [0, T], |f(x)| \leqslant K.$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + nT \in [0, T]$. On a alors $f(x) = f(x + nT)$ par périodicité et, comme $x + nT \in [0, T]$, $|f(x + nT)| \leqslant K$. On en déduit que $|f(x)| \leqslant K$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction est bornée.

Correction 20 Par définition de la limite, on peut trouver $A > 0$ tel que : $\forall x > A, f(x) \in]\ell - 1, \ell + 1[$. Par ailleurs, f est continue sur le segment $[0, A]$ donc bornée, il existe donc un réel K tel que $\forall x \in [0, A], \left|f(x)\right| \leqslant K$. Au final, on a $\forall x \in \mathbb{R}^+, \left|f(x)\right| \leqslant \max(K, |\ell| + 1)$ donc f est bornée.

Correction 21 Cela revient à montrer l'existence de $c \in]0, 1[$ tel que

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - f(c)\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

on pose donc $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, et nous allons montrer que h s'annule.

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$h(x) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(f(t) - f(x)\big)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On sait que g est strictement positive, il suffit donc de trouver deux éléments α et β tels que

$$\forall t \in [0, 1], f(\alpha) - f(t) \geqslant 0 \text{ et } f(\beta) - f(t) \leqslant 0.$$

On aura alors $h(\alpha) \geqslant 0$ et $h(\beta) \leqslant 0$.

L'existence de ces deux réels vient du fait qu'une fonction continue sur un segment atteint ses bornes. On sait donc qu'il existe deux tels réels α et β.

Si $h(\alpha) = 0$ ou $h(\beta) = 0$, on a montré que h s'annule. Sinon, on applique le théorème des valeurs intermédiaires entre α et β pour affirmer l'existence d'un point compris entre α et β, en lequel h s'annule. On a bien montré l'existence de $c \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Correction 22 On fait une IPP :

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1} f(t)}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On sait que f' est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée par un réel K. On en déduit que

$$\left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant K\left|\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{K}{n+2}.$$

Par encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\displaystyle\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi, on a bien

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $f(1) \neq 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{f(1)}{n}$.

Correction 23 Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$. Par continuité de f et g, on a $f(x_n) \to f(x)$ et $g(x_n) \to x$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$ car $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{Q}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n)$ donc $f(x) = g(x)$.

Ceci étant vrai pour tout réel x, on a montré $f = g$.

Correction 24 Soit f une telle fonction. Pour $x = y$, on a $f\left(\dfrac{2x}{5}\right) = f(x)$. Ceci étant valable pour tout x, c'est vrai aussi pour $\dfrac{2x}{5}$ ce qui donne :

$$f\left(\frac{2}{5}\frac{2x}{5}\right) = f\left(\frac{2x}{5}\right) = f(x).$$

Par une récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n x\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\left(\frac{2}{5}\right)^n x \to 0$ et f est continue en 0 donc $f\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n x\right) \to 0$. Par unicité de la limite, on a $f(x) = f(0)$.
Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction est constante.

Réciproquement, une fonction constante vérifie bien la relation donc l'ensemble recherché est l'ensemble des fonctions constantes.

Correction 25 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ et par récurrence immédiate, on montre que $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. On fait maintenant tendre n vers $+\infty$. Alors, par continuité de f en 0, on a $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$ et comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$, on a $f(x) = f(0)$ par unicité de la limite. Ceci étant valable pour tout x, f est bien constante.

Correction 26

1. On a $\frac{x^2+2x}{x^3-x^2} = \frac{x+2}{x(x-1)} \sim_{x\to 0} -\frac{2}{x}$. Or $x \mapsto -\frac{2}{x}$ n'a pas de limite en 0 (limite à gauche et à droite différentes), on en déduit que $f_1(x)$ non plus. En $+\infty$, on a $f_1(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.
2. $a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, on a $f_2(a_n) = 0$ et $b_n = \frac{1}{2n\pi}$, $f_2(b_n) = \cos \frac{1}{2n\pi} \to 1$ donc f_2 n'admet pas de limite en 0. Comme $f_2\left(\frac{1}{x}\right) = f_2(x)$, f_2 n'admet pas non plus de limite en $+\infty$.
3. $\lim_{x\to 0} f_3(x) = 0$ et f_3 n'admet pas de limite en $+\infty$ en prenant $a_n = 2n\pi$ et $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. On a $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, $f_3(a_n) = 0$ et $f_3(b_n) = b_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_3(a_n) = 0 \neq \lim_{n\to+\infty} f_3(b_n) = +\infty$.

Correction 27

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$ donc
$$1 - x < f(x) \leqslant 1$$
Par le thm des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
2. $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} x = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} 2x = 1$ donc f n'admet pas de limite en $\frac{1}{2}$.
3. Pour tout $x > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ donc $f(x) = 0$. On en déduit que $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$.
4. Comme $\lfloor x \rfloor$ est continue au voisinage de $\frac{3}{2}$, on a $\lim_{x\to\frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \frac{2}{3}$.
5. Pour tout $x > 1$, $f(x) = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
6. Pour tout $x < -1$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$.

Correction 28 Pour $x > 1$, on a $f(x) = 0$, pour tout $x < -1$, $f(x) = -x^2$ donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, si $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$, la fonction f est continue en tant que produit et composée de fonction continue. Soit $k \in \mathbb{Z}^\star$. Étudions la limite à gauche et à droite en $\frac{1}{k}$: • Si $x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, alors $\frac{1}{x} \in [k, k+1[$ donc $E\frac{1}{x} = k$ et $f(x) = x^2 k$ ce qui implique $\lim_{x\to\frac{1}{k}^-} f(x) = \frac{1}{k}$.
• Si $x \in \left]\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right]$, alors $\frac{1}{x} \in [k-1, k[$ donc $E\frac{1}{x} = k-1$ et $f(x) = x^2(k-1)$ ce qui implique $\lim_{x\to\frac{1}{k}^+} f(x) = \frac{k-1}{k^2}$.

La fonction f n'admet pas la même limite à gauche et à droite en $\frac{1}{k}$. Elle est donc discontinue en tous les inverses des entiers.
On a donc montré que f est continue sur $\mathbb{R}^\star \setminus \{\frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^\star\}$.

Correction 29 Elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ car la fonction partie entière l'est sur cet ensemble. Soit $n \in \mathbb{Z}$, déterminons la limite à gauche et à droite de f en n. Si $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$ donc $f(x) = (n-1) + (x-(n-1))^2$. On a donc

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = n.$$

Si $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$ donc $f(x) = n + (x-n)^2$. On a donc :

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = n.$$

Enfin, $f(n) = n+(n-n)^2 = n$. On a donc $\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^+} f(x) = f(n)$ donc f est continue en n. Ceci étant vrai pour tout entier, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction 30 On écrit :

$$(\ln|x|)^4 \ln(1+x^4) = x^4 (\ln|x|)^4 \times \frac{\ln(1+x^4)}{x^4}.$$

Le premier quotient tend vers 0 par le théorème de croissances comparées tandis que le second tend vers 1. On en déduit que la limite de la fonction en 0 est 0, elle peut donc être prolongée par continuité en posant $f(0) = 0$.

Correction 31 La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et la fonction est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

Correction 32 Il faut déterminer si la fonction possède une limite finie en 0. Pour cela, on remarque que la fonction est un taux d'accroissement. Précisément, si on pose $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0},$$

sa limite quand x tend vers 0 est donc égale à $g'(0) = \frac{1}{2}$. On peut, par conséquent, prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

Correction 33 On pose $g(x) = f(x+1/2) - f(x)$. La fonction g est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et on a $g(0) = f(1/2) - f(0)$ et $g(1/2) = f(1) - f(1/2) = -g(0)$. Si $g(0) = 0$ alors $c = 0$ convient. Sinon, $g(0)$ et $g(1/2)$ sont de signes opposés ; par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule donc au moins une fois entre 0 et $\frac{1}{2}$ donc il existe $c \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $g(c) = 0$ d'où $f\left(c+\frac{1}{2}\right) = f(c)$.

Correction 34 On a

$$g(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$$

et

$$g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2}).$$

Comme $f(a) = f(b)$ alors $f(a) = -g(\frac{a+b}{2})$ ce qui implique :

$$g(a)g(\frac{a+b}{2}) \leqslant 0.$$

Si $g(a) = 0$ ou $g(\frac{a+b}{2}) = 0$, la fonction g s'annule. Sinon, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à g qui est continue et on montre que g s'annule en un point c strictement compris entre a et $\frac{a+b}{2}$.

Correction 35 Supposons par l'absurde qu'il existe a, b tels que $f(a) > c$ et $f(b) < c$, on applique alors le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b et on obtient un point en lequel f vaut c ce qui est une contradiction.

On peut aussi dire que la fonction $x \mapsto f(x) - c$ est continue et ne s'annule pas donc elle est de signe constant.

Correction 36 On pose $h = \frac{f}{g}$. Cette fonction est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. On en déduit qu'il existe $\beta \in [0,1]$ tel que

$$\forall x \in [0,1], h(x) \geqslant h(\beta).$$

Par hypothèse, on a $h(\beta) > 1$. Posons $\alpha = \frac{h(\beta)+1}{2}$. On a alors $h(\beta) > \alpha > 1$ et :

$$\forall x \in [0,1],\ h(x) > \alpha,$$

ce qui est équivalent à :

$$\forall x \in [0,1], f(x) > \alpha g(x).$$

Correction 37

1. On sait qu'il existe $A > 0$ et $B < 0$ tel que :

$$\forall x > A, |f(x)| < \frac{1}{2} \text{ et } \forall x < B, |f(x)| < \frac{1}{2}$$

   Soit $a = \max(A, |B|)$, alors, $\forall x$ tel que $|x| > a$, on a $|f(x)| < \frac{1}{2}$ donc $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

2. f est bornée sur $]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$ par $\frac{1}{2}$ et elle est bornée sur le segment $[-a, a]$ car elle est continue. Comme $f(0) = 1 > \frac{1}{2}$, le sup de f est atteint sur $[-a, a]$ et comme f est continue sur ce segment, elle atteint ses bornes et possède donc un maximum.

Correction 38 Soient $A > 0$. On veut montrer qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\phi(n) > A$.

On pose $\Omega = \{n \in \mathbb{N}, \phi(n) \leqslant A\}$.

Si Ω est vide, alors $\phi(n) > A$, $\forall n \geqslant 0$ et on prend $n_0 = 0$. Sinon, montrons que Ω est fini. On suppose par l'absurde qu'il est infini. On a alors un nombre infini d'entiers n dont l'image est inférieure à A. Or ϕ étant à valeurs entières, il y a $\lfloor A \rfloor$ images distinctes possibles inférieures à A. Comme ϕ est injective, on a une contradiction. L'ensemble Ω est donc fini et non-vide ce qui entraine qu'il possède un maximum n_0, on a alors, par définition de Ω, $\phi(n) > A$, $\forall n \geqslant n_0$;

Dans les deux cas, on a montré que pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(n) > A, \forall n \geqslant n_0$ ce qui montre que ϕ tend vers $+\infty$.

On peut aussi raisonner par l'absurde avec la définition de la limite. On suppose par l'absurde que ϕ ne tend pas vers $+\infty$. Alors, il existe $A > 0$ tel que $\forall N, \exists n \geqslant N$, $\phi(n) < A$.

On pose $m = \lfloor A \rfloor + 1$. On applique ce qui précède avec $N = 0$. On sait qu'il existe $n_0 \geqslant 0$, $\phi(n_0) < A$. En appliquant ce qui précède avec $N = n_0 + 1$, on sait qu'il existe $n_1 \geqslant n_0 + 1$ tel que $\phi(n_1) < A$. On construit ainsi une famille $(n_0, n_1, \ldots, n_m)$ d'entiers strictement croissante telle que $\phi(n_i) < A$. Or cette famille compte $m+1$ entiers distincts dont les images appartiennent à l'intervalle $[0, A]$ donc $[\![0, m-1]\!]$ qui contient m entiers. On en déduit que deux de ces entiers ont même image par ϕ ce qui contredit l'injectivité de ϕ.

Correction 39 D'après l'exercice **??**, on sait que ϕ et ϕ^{-1} tendent vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

Montrons tout d'abord que ℓ ne peut être strictement inférieure à 1. On suppose, par l'absurde, que c'est le cas. On pose $A = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$, on sait alors qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, on a $\phi(n) < An$. On pose $k = \left\lfloor \dfrac{1}{A} \right\rfloor$. Pour tout $n \in [\![n_0, kn_0]\!]$, on a $\varphi(n) < An \leqslant Akn_0$ et $Ak \leqslant 1$. On en déduit que l'ensemble $\{\phi(n), n \in [|n_0, kn_0|]\}$ contient $(k-1)n_0 + 1$ éléments entiers distincts compris entre 0 et $n_0 - 1$ ce qui est impossible par le principe des tiroirs puisque $k \geqslant 2$ donc $(k-1)n_0 + 1 > n_0$. On a donc $\ell \geqslant 1$.

On peut aussi considérer $E = \{n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n\}$. Cet ensemble est non vide car il contient 0 et il est majoré par définition de la limite. En effet, on sait qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\varphi(n) < n$, E est donc majoré par n_0, on en déduit qu'il est fini. On pose $N = \max\{\varphi(k), k \in E\} + 1$. Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, on a alors

— Si $n \in E$, alors $\varphi(n) < N$.

— Si $n \notin E$, alors $\varphi(n) < n \leqslant N$

Dans les deux cas, $\varphi(n) \in [\![0, N-1]\!]$. Or par injectivité de φ, on a $\{\varphi(k), k \in [\![0, N]\!]\}$ contient $N+1$ entiers distincts ce qui est absurde.

On en déduit que $\ell \geqslant 1$.

On remarque ensuite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\phi^{-1}(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\phi \circ \phi^{-1}(n)}{\phi^{-1}(n)} = \lim_{m\to+\infty} \frac{\phi(m)}{m}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi^{-1}(n) = +\infty$.
On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\phi^{-1}(n)} = \ell.$$

Comme $\ell \neq 0$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \phi^{-1}(n) \frac{n}{=} \frac{1}{\ell}.$$

Or, le raisonnement précédent peut être appliqué à φ^{-1} et permet de montrer que $\dfrac{1}{\ell} \geqslant 1$.
Par double inégalité, on a $\ell = 1$.

Correction 40 Si f est continue en 0, il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$. On suppose maintenant que la limite de $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est $f(0)$ et nous allons montrer que f est continue en 0.
Soit $\epsilon > 0$, alors, comme $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(0)$, il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N, \mid f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right) \mid < \epsilon$. Soit maintenant $\eta = \frac{1}{N}$, alors pour $x \in [0, \eta]$, on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\eta)$ par croissance de f, or $f(\eta) = f\left(\frac{1}{N}\right) \leqslant f(0) + \epsilon$ ce qui impose $\mid f(x) - f(0) \mid < \epsilon$ d'où la continuité en 0 de f.

C'est faux si on ne suppose pas la croissance de f. Prenons par exemple la fonction définie par $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Alors

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(2n\pi) = 1 = f(0).$$

En revanche, f n'a pas de limite en 0. En effet, si elle en avait une, on devrait trouver la même limite pour $f(u_n)$ quelque soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0. Pour $u_n = \frac{2}{2n+1}$, on trouve $f(u_n) = \cos(2n+1)\pi = -1 \neq 1$ ce qui montre que f n'admet pas de limite en 0.

Correction 41 Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $y \leqslant x$, on a $f(y) \leqslant f(x)$ par croissance de f et $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{f(y)}{y}$ par décroissance de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$. On a donc, comme $y > 0$,

$$\frac{y}{x} f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(x).$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{y\to x^-} f(y) = f(x)$. On fait de même pour $y \geqslant x$, on a $f(x) \leqslant f(y)$ et $\dfrac{f(y)}{y} \leqslant \dfrac{f(x)}{x}$ donc

$$f(x) \leqslant f(y) \leqslant \frac{y}{x} f(x).$$

Par le théorème d'encadrement, on a $\lim_{y\to x^+} f(y) = f(x)$. On a montré que :

$$\lim_{y\to x} f(y) = f(x).$$

La fonction f est continue en x. Ceci étant vrai pour tout $x > 0$, la fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Correction 42 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $g_n : x \mapsto f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$. On cherche à montrer qu'il existe α_n tel que $g_n(\alpha_n) = 0$. On remarque que la somme $\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\dfrac{k}{n}\right)$ est une somme télescopique, on a donc : $\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\dfrac{k}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0$.
Si tous les termes de la somme sont nuls, la fonction g_n s'annule ce qui montre l'existence de α_n.
Si tous les termes sont non nuls, il existe au moins deux termes de la somme qui sont de signes opposés. On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre ces deux réels, puisque g_n est continue, et trouver un point d'annulation de la fonction g_n.

On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \exists \alpha_n \in]0,1[, g(\alpha_n) = 0$, ce qui est équivalent à

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \exists \alpha_n \in]0,1[, f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n).$$

Correction 43 On suppose par l'absurde que f n'est pas constante. Il existe donc $a \neq b$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Sans nuire à la généralité, on suppose $f(a) < f(b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $f(a) < \dfrac{f(b) - f(a)}{n} + f(a) < f(b)$ donc, par le TVI, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_n) = \dfrac{f(b) - f(a)}{n} + f(a)$. On a ainsi montré que f prend une infinité de valeurs différentes ce qui contredit l'hypothèse sur f. On en déduit que f est constante.

Correction 44 Si f n'est pas strictement monotone, alors il existe

— $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$ (f n'est pas strictement décroissante)

— et $x' < y'$ tels que $f(x') > f(y')$ (f n'est pas strictement croissante).

On pose $g(t) = f(x + t(x - x')) - f(y + t(y' - y))$. alors

— g est définie sur $[0,1]$ et continue.

— $g(0) = f(x) - f(y) < 0$.

— $g(1) = f(x') - f(y') > 0$

donc d'après le TV1, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$ ce qui est équivalent à $f(x + c(x - x')) = f(y + c(y - y')$. Or f est bijective donc $x + c(x' - x) = y + c(y' - y)$ ce qui se réécrit :

$$\underbrace{(x-y)(1-c)}_{<0} = \underbrace{c(y'-x')}_{>0}$$

ce qui est impossible donc f est strictement monotone.

Correction 45 On pose $\alpha = \sup_{x\in[a,b]}(f) = \sup_{x\in[a,b]}(g)$. On sait que f et g sont continues sur le segment $[a,b]$ donc elles atteignent leurs bornes. On a donc $\alpha = f(x_0) = g(x_1)$. On pose $h = f - g$. La fonction h est continue.

On a $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = \sup g - g(x_0) \geqslant 0$ et $h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = f(x_1) - \sup f \leqslant 0$.

Si $h(x_0) = 0$ ou $h(x_1) = 0$, h s'annule. Sinon, $h(x_0)h(x_1) < 0$ et on applique le TVI à h qui doit donc s'annuler.

Remarque : si on suppose uniquement f et g bornées sur un intervalle quelconque I, cela ne marche pas. En effet, prenons

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

et

$$g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}\right.$$

Alors on a $\sup f = \sup g = 1$ et pourtant, il n'existe pas de réels c tel que $f(c) = g(c) = 1$.

Cela redevient vrai si on suppose f et g non constantes.

Correction 46

1. Par croissances comparées, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ donc on peut poser $f(0) = 0$. On a $f(x) = \dfrac{x^2 \ln(1 + (x-1))}{x-1}$ avec $x - 1 \to 0$, on a donc $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ et on peut poser $f(1) = 1$. La fonction f est bien prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
2. La fonction f (prolongée) est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée. Notons K un majorant de sa valeur absolue. On a alors

$$|I_n| \leqslant \int_0^1 x^n K \,\mathrm{d}x,$$

donc, en sortant la constante K et en calculant l'intégrale de droite

$$|I_n| \leqslant \frac{K}{n+1}.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Correction 47

1. Notons Ω l'ensemble des points fixes de f. Montrons tout d'abord que cet ensemble est non-vide. La fonction f étant définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a $f(0) \geqslant 0$ et $f(1)-1 \leqslant 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $x \mapsto f(x)-x$, cette dernière s'annule donc f admet un point fixe. Comme f est définie sur $[0,1]$, $\Omega \subset [0,1]$ donc Ω est borné. On peut alors affirmer que Ω admet une borne supérieure et une borne inférieure. Reste à savoir si ses bornes sont atteintes!

   Notons $\alpha = \sup\Omega$. Il existe alors une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω telle que $\alpha_n \to \alpha$. Par définition, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) = \alpha_n$. Or, f étant continue, on a $\lim_{n\to+\infty} f(\alpha_n) = f(\alpha)$. Par unicité de la limite, on a $f(\alpha) = \alpha$ donc $\alpha \in \Omega$.
   On procède de même pour $\beta = \inf\Omega$. On a montré que l'ensemble Ω des points fixes de f admet un minimum β et un maximum α.
2. Soit $\lambda \in \Omega$. Alors $f(\lambda) = \lambda$ donc $g \circ f(\lambda) = g(\lambda)$. Or, par hypothèse, $g\circ f = f \circ g$ donc $g\circ f(\lambda) = f\circ g(\lambda)$. On a donc $f \circ g(\lambda) = g(\lambda)$ donc $g(\lambda) \in \Omega$.
3. On sait que $\alpha = \max\Omega$ est un élément de Ω donc, d'après la question précédente, $g(\alpha) \in \Omega$. De même, $g(\beta) \in \Omega$. Or, α et β étant le maximum et le minimum de Ω, on a $g(\alpha) \leqslant \alpha$ et $g(\beta) \geqslant \beta$, ce qui se réécrit $g(\alpha) \leqslant f(\alpha)$ et $g(\beta) \geqslant f(\beta)$ puisque α et β sont des points fixes de f. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $f-g$ qui est continue. Cela nous donne l'existence d'un réel x tel que $f(x) = g(x)$.

Correction 48

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f(x^2)$ puis $f(x^2) = f(x^4)$ donc $f(x) = f(x^4)$. Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{2^n})$.

Soit maintenant $x > 0$. Alors $f(\sqrt{x}) = f(x)$ et $f\left(x^{\frac14}\right) = f(\sqrt{x})$ donc $f\left(x^{\frac14}\right) = f(x)$ et, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$.

— Si $|x| < 1$, alors $f(x) = f(x^{2^n})$ tend vers $f(0)$ par continuité de f en 0, on a donc $f(x) = f(0)$.

— Soit maintenant $x \geqslant 1$, alors $x^{\frac{1}{2^n}} \to 1$ donc par continuité de f en 1, on a $f(x) = f(1)$. Or, d'après le travail fait ci-dessus, on a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(0)$, par unicité de la limite, on a $f(0) = f(1)$.
Ainsi, nous avons montré que $\forall x > -1, f(x) = f(0)$.

— Soit maintenant $x \leqslant -1$, alors $x^2 > 0$ donc $f(x^2) = f(0)$. Or $f(x) = f(x^2)$ d'où $f(x) = f(0)$.

On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction 49

1. On le montre par récurrence sur n, après avoir fixé un réel x. Le cas $n = 1$ est facile mais il faut initialiser à 0. On remarque donc que pour $x = y = 0$, on a $f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$. L'égalité est donc vraie au rang $n = 0$.
   On suppose qu'il existe un entier n tel que $f(nx) = nf(x)$. On écrit
   $$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x),$$
   puis, par hypothèse de récurrence, $f(nx) = nf(x)$ donc
   $$f((n+1)x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$
   Le résultat est vrai au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, il est vrai pour tout entier n.
2. On sait que $f(0) = 0$, on a donc $f(x-x) = 0 = f(x) + f(-x)$. On en déduit que f est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
   — Si $n \geqslant 0$, le résultat est vrai d'après la question précédente.
   — Si $n < 0$, on pose $m = -n > 0$, on a donc $f(mx) = mf(x)$. Or $f(mx) = f(-nx) = -f(nx)$. On a donc $f(nx) = -mx = nx$ et le résultat est encore vrai.
   On a montré, par disjonction de cas que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors $x = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
   On a $f(qx) = qf(x)$ d'après la question précédente et $f(qx) = f(p) = pf(1)$ toujours d'après la question précédente. On en déduit que $f(x) = \dfrac{1}{q} f(qx) = \dfrac{p}{q} f(1) = xf(1)$.
   On a bien l'égalité souhaitée.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$. Par continuité de f, $f(x_n) \to f(x)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n f(1)$ puisque $x_n \in \mathbb{Q}$. On en déduit, par unicité de la limite, que $f(x) = xf(1)$.
   On a montré que si f vérifie cette relation, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$. Réciproquement, les fonctions de la forme $x \mapsto ax$, avec $a \in \mathbb{R}$ vérifie cette relation.
   Ainsi, les fonctions vérifiant cette relation sont les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.