Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2025-2026
Feuille 13

TD 13 : Développements limités.

1 DL et polynômes

Exercice 1.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!], P^{(k)}(0) = k! a_k$.

Exercice 2.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n à coefficients réels tel que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(1) = k$.

2 Calcul de DL

Exercice 3.
Donner un DL à l'ordre 3 en zéro des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(1+x)\cos(x)$.
2. $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$.
3. $x \mapsto \sin(2x)$.
4. $x \mapsto xe^{2x+1}$.
5. $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.
6. $x \mapsto \arctan(x)$

Exercice 4.
Déterminer un DL d'ordre 3 de $x \mapsto \arctan(x^3)$ en 1.

Exercice 5.
Déterminer un DL à l'ordre 4 de $f : x \mapsto \sin(\ln(x+1)) - \ln(\sin(x)+1)$ en 0. En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0.

3 Dérivabilité

Exercice 6.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)-1}{\sin^2 x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement est-il dérivable ?

Exercice 7.
Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$ est prolongeable par continuité. On note encore f son prolongement continu. Montrer qu'il est dérivable et donner $f'(0)$.

4 Calcul de limites et d'équivalents

Exercice 8.
Déterminer les limites suivantes en 0 :

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
2. $x \mapsto \dfrac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)}$.
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}$.
4. $x \mapsto \dfrac{e^x-1-\sin(x)}{\cos(x)-1}$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$.
6. $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Exercice 9.
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}$.

Exercice 10.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+x+1}\right)^x$.

5 Utilisation de l'unicité du DL

Exercice 11.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Déterminer la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

Exercice 12.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(\cos x)}{1+x}$ définie sur $]-1,1[$. Déterminer $f'(0)$ et $f"(0)$.

6 Détermination de tangente et de la position de celle-ci

Exercice 13.
Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Déterminer l'équation de la tangente en $x=1$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 14.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Déterminer l'équation de la tangente à f en $x=2$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 15.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x - e^{-x}}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement.
2. Montrer que f admet un DL à l'ordre 3 en 0 que l'on calculera.

3. Montrer que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
4. Que dire de la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 ?

7 DL et intégrale

Exercice 16.
Soit $h : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer un DL à l'ordre 4 en 0 de $t \mapsto \dfrac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$.
2. En déduire un DL à l'ordre 5 en 0 de h.

Exercice 17.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

8 DL et suites

Exercice 18.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer que la suite est bien définie et déterminer sa limite.
2. Montrer que $u_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $u_n = n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

9 Fonction réciproque et équation implicite

Exercice 19.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une unique solution x_ϵ dans $\mathbb{R}_+$ à l'équation $e^{-\epsilon x} = x$ d'inconnue x.
2. Montrer que $x_\epsilon =_{\epsilon\to 0} 1 - \epsilon + \dfrac{3\epsilon^2}{2} + o\left(\epsilon^2\right)$.

Exercice 20.
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\mathrm{sh}(x) - x \end{array}\right.$. Montrer que f est bijective et déterminer un DL4 de f^{-1} en 0

10 Développement asymptotique et asymptote

Exercice 21.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{2x^2+1}}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

1. Donner l'équation de sa tangente en 0 et sa position relative par rapport au graphe de f.
2. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation et la position par rapport à la courbe.

Exercice 22.
Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1}\,e^{-1/x}$ admet une asymptote dont on précisera l'équation et la position de l'asymptote.

11 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 23.
Déterminer le DL d'ordre 6 en 0 de th. [1]

Exercice 24.
Déterminer un DL à l'ordre 6 en 0 de $\arctan(x^3)$.

Exercice 25.
Déterminer le DL3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{2-\sqrt{1-x}}$.

Exercice 26.
Déterminer le DL3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(\ln(1+x))}$.

Exercice 27.
Déterminer le DL3 en $\dfrac{1}{2}$ de $x \mapsto \cos(\pi x(1-x))$.

Exercice 28.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\mathrm{sh}^2(x)}$. Déterminer un DL3 en 0 de f.

Exercice 29.
Soit $f : x \mapsto \cos x^x$. Déterminer un DL4 en 0 de f.

Exercice 30.
Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+4\sin x}}$. Déterminer un DL3 en 0 de f.

Exercice 31.
Donner le DL en 0 à l'ordre 6 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

1. On rappelle que $\mathrm{th} = \mathrm{sh}/ch$.

Exercice 32.
Donner le DL en 0 à l'ordre 5 de $x \mapsto \sin(\tan(x))$.

Exercice 33.
Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto (\ln(1+x))^2$.

Exercice 34.
Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \exp(\sin(x))$.

Exercice 35.
Donner le DL en 0 à l'ordre 9 de $x \mapsto \sin^6(x)$.

Exercice 36.
Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln(1+\cos x)$.

Exercice 37.
Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

Exercice 38.
Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\operatorname{ch} x}$.

Exercice 39.
Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $\mapsto e^{3+x^2}$.

Exercice 40.
Soit f définie par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{2x}$ et $f(0) = 0$, f est-elle dérivable ?

Exercice 41.
Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$ et $f(0) = 0$, f est-elle dérivable ?

Exercice 42.
Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

Exercice 43.
Déterminer un équivalent de $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - e^{\frac{1}{2n^2}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)}$.

Exercice 44.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - \tan(x)}{\sqrt{1+2x} - \ln(1+x) - 1}$.

Exercice 45.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+x^2)} - \dfrac{1}{\tan^2 x}$. Déterminer la limite en 0 de $f(x)$.

Exercice 46.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x)^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1-x}}{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}$.

Exercice 47.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - ex^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$.

Exercice 48.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\cos(x)-1)}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

Exercice 49.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$.

Exercice 50.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\cos(x)-1}$.

Exercice 51.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\ln(1+x^2)}\right)$.

Exercice 52.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.

Exercice 53.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\arcsin x - \arctan x}$.

Exercice 54.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch}(\sin(x)) - \operatorname{ch}(x)}{(\sin(x))^4}$.

Exercice 55.
Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$.

Exercice 56.
Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (\cos(x)+x)}{x^2}$.

Exercice 57.
Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x}$.

Exercice 58.
Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$.

Exercice 59.
Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \left(\tan\dfrac{x}{2}\right)^{\tan x}$.

Exercice 60.
Calculer le DL à l'ordre 1 en 0 de f définie par $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \dfrac{3}{2}$. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

Exercice 61.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)-1}{\sin^2 x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement est-il dérivable ?

Exercice 62.
Calculer le DL à l'ordre 1 en 0 de f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. En déduire que f est dérivable et donner $f'(0)$.

Exercice 63.
Soit $f : x \mapsto e^{\cos x}$. Déterminer l'équation de la tangente à f en $x = 0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 64.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{3+\sin x}$. Déterminer l'équation de la tangente en $x=0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 65.
Soit $f : x \mapsto x+\sin x$. Montrer que f est bijective et déterminer un DL3 en 0 de f^{-1}.

12 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 66.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 67.
On considère la fonction f définie par $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$, $\forall x>0$ et $f(0)=0$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer un DL à l'ordre 3 de f en 1.
3. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?

Exercice 68.

1. Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^\star$, il existe un unique réel $x_n>0$ tel que $x_n^n+x_n=1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.
3. Montrer que la suite converge vers 1.
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose $y_n=1-x_n$. Montrer que $y_n\sim-\dfrac{\ln(y_n)}{n}$ puis que $-\ln(y_n)\sim\ln(n)$.
5. En déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 69.
Montrer que la fonction $x\mapsto(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de celle-ci par rapport au graphe de f.

Exercice 70.
Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ de $x\mapsto\arctan\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$.

Exercice 71.
On considère la fonction $x\mapsto x\arctan\dfrac{x}{x-1}$. On souhaite montrer qu'elle admet une asymptote en $-\infty$ et déterminer une équation de cette asymptote.

1. Déterminer un DL à l'ordre 2 de $\tan\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)-1$ en 0.
2. En déduire un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\arctan(X+1)$.
3. Déterminer l'équation de l'asymptote en $-\infty$ de la fonction.
4. Quelle est la position de l'asymptote par rapport au graphe de la fonction ?

Memo

- Comment déterminer un développement limité ?
  - Utiliser les développements limités usuels
  - Intégrer un développement limité en n'oubliant pas de déterminer la constante d'intégration (pour les rares cas où elle n'est pas nulle)
- Comment déterminer le développement limité d'un quotient ?
  Se ramener à un produit en faisant apparaître un quotient de la forme $\dfrac{1}{1+X}$ avec $X\to0$.
- Comment déterminer une limite ?
  Déterminer un équivalent ou un DL
- Comment déterminer la position relative du graphe
  par rapport à la tangente/asymptote ? Étudier le signe du premier coefficient non nul d'ordre $k\geqslant2$ du développement limité (ou du développement asymptotique dans le cas d'une asymptote).
- Comment déterminer un DL de f^{-1} quand on n'a pas l'expression ? intégrer un DL de la dérivée, identifier les coefficients du DL de $f\circ f^{-1}$ ou utiliser un DL de f puis un changement de variable

Correction du TD n 13

Correction 1 La manière la plus élégante est de considérer la fonction polynômiale f associée à P. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et son développement limité en 0 est :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).$$

Or, $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$. Par unicité du développement limité, on peut identifier les coefficients et on obtient $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=a_k$, autrement dit $P^{(k)}(0)=k!a_k$.

Il est également possible d'écrire

$$\begin{aligned}P^{(j)}(X) &= \sum_{k=0}^{n}a_k(X^k)^{(j)}\\ &= \sum_{k=j}^{n}a_k\frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}\text{car } (X^k)^{(j)}=0 \text{ pour } j>k\end{aligned}$$

Le terme constant de $P^{(j)}(X)$ correspond au terme de la somme pour $k=j$ et on retrouve l'égalité souhaitée.

Correction 2 On raisonne par analyse/synthèse.

Analyse : On suppose qu'il existe un polynôme P de degré n tel que $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(1)=k$. On pose $Q(X)=P(X+1)$ et on note $Q=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$. On a $\forall k\in\mathbb{N}, Q^{(k)}(0)=P^{(k)}(1)$. On a donc :

$$Q^{(k)}(0)=k.$$

D'après l'exercice 1, on sait que

$$\forall k\in[\![0,n]\!], Q^{(k)}(0)=k!a_k,$$

on a donc

$$\forall k\in[\![0,n]\!], k!a_k=k,$$

d'où

$$a_0=0 \text{ et } \forall k\in[\![1,n]\!],\ a_k=\frac{1}{(k-1)!}.$$

Ainsi, $Q(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{X^k}{(k-1)!}$ et $P(X)=Q(X-1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-1)^k}{(k-1)!}$.

Synthèse : Réciproquement, on pose $P(X)=\sum_{j=1}^{n}\frac{(X-1)^j}{(j-1)!}$. Le polynôme P est bien de degré n. De plus, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$$P^{(k)}(X)=\sum_{j=k}^{n}\frac{j!(X-1)^{j-k}}{(j-k)!(j-1)!}=\sum_{j=k}^{n}\frac{j(X-1)^{j-k}}{(j-k)!},$$

on a donc

$$P^{(k)}(1)=\frac{k}{0!}=k.$$

On a montré l'existence d'un tel polynôme. De plus, la phase d'analyse montre que ce polynôme est unique.

Correction 3

1. On a $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ et $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$ donc

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\cos(x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\\ &= x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

2. On va multiplier le DL de $x\mapsto e^x$ et celui de $\frac{1}{1+x}$. Comme on veut un DL à l'ordre 3, on fait un DL à l'ordre 3 des deux fonctions :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

et

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o(x^3).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+x-x^2+x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3!}o(x^3)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

3. On a
$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$
donc $\sin(2x)=2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)$. Ici, on peut appliquer la formule du DL en 0 de sinus à $2x$ car $2x\to 0$. Notez que $o(8x^3)=o(x^3)$ donc on écrit simplement $o(x^3)$.
4. Attention, $2x+1\to 1$ quand $x\to 0$, on ne peut donc pas remplacer x par $2x+1$ dans le DL en 0 de exponentielle ! On écrit
$$xe^{2x+1}=xe.e^{2x},$$
puis on utilise le DL de e^x :
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$
donc
$$e^{2x}=1+2x+2x^2+o(x^2).$$
(on fait un DL à l'ordre 2 car, en multipliant par x, on obtiendra un DL à l'ordre 3). On a donc :
$$xe^{2x+1}=ex+2ex^2+2ex^3+o(x^3).$$
5. On va diviser par x^2, il nous faut donc un DL à l'ordre 5 de $1-\cos(x)$. On a
$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$
(car le terme en x^5 est nul) donc
$$1-\cos(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o(x^5),$$
puis
$$\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+o(x^3).$$
On sait que la limite de $\frac{1-\cos(x)}{2}$ est $\frac{1}{2}$ donc le premier terme du DL est juste !
6. On va intégrer le DL de $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$. Comme on veut un DL à l'ordre 3, il suffit d'intégrer un DL à l'ordre 2 de $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$. On écrit
$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^2),$$
en intégrant, on obtient :
$$\arctan(x)=\arctan(0)+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Correction 4 On pose $x=1+h$, on a $h\to 0$ et $x^3=1+3h+3h^2+h^3$. On commence par chercher un DL3 en 0 de $y\mapsto\arctan(1+y)$. On va, pour cela, calculer un DL2 de sa dérivée. On écrit :
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+(1+y)^2}&=\frac{1}{2}\frac{1}{1+y+\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-y-\frac{y^2}{2}+y^2+o(y^2)\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}+o(y^2)\end{aligned}$$
On intègre et on obtient :
$$\arctan(y+1)=\arctan(1)+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{12}+o(y^3)$$
Enfin, on pose $y=3h+3h^2+h^3$, on obtient :
$$\begin{aligned}\arctan\left((1+h)^3\right)&=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(3h+3h^2+h^3\right)-\frac{1}{4}\left(9h^3+18h^3\right)+\frac{9h^3}{4}+o(h^3)\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{3h}{2}-\frac{3h^2}{4}-\frac{3h^3}{4}+o(h^3)\end{aligned}.$$
Il suffit maintenant de remplacer h par $x-1$ pour avoir le DL souhaité :
$$\arctan(x^3)=\frac{\pi}{4}+\frac{3(x-1)}{2}-\frac{3(x-1)^2}{4}-\frac{3(x-1)^3}{4}+o((x-1)^3).$$

Correction 5 On a $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ et $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$ donc :
$$\begin{aligned}\sin(\ln(x+1))&=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)-\frac{1}{6}\left(\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\right)^3+o(x^4)\\&=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)-\frac{1}{6}\left(x^3-3x^2\frac{x^2}{2}\right)+o(x^4)\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\ln(\sin(x)+1)&=\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3-\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^4+o(x^4)\\&=\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-2x\frac{x^3}{6}\right)+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\end{aligned}$$
On a donc $\sin(\ln(1+x))-\ln(\sin(x)+1)=\frac{x^4}{12}+o(x^4)$ d'où :
$$\sin(\ln(1+x))-\ln(\sin(x)+1)\sim\frac{x^4}{12}.$$

Correction 6 On a $\cos(x)-1=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$ et $\sin^2(x)=x^2+o(x^3)$. On en déduit que :

$$f(x)=\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x^2+o(x^3)}=\frac{-\frac{1}{2}+o(x)}{1+o(x)}=-\frac{1}{2}+o(x).$$

On en déduit que f admet une limite finie en 0 égale à $-\frac{1}{2}$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=-\frac{1}{2}$. De plus, la fonction prolongée est continue et admet un DL1 en 0, on peut donc affirmer qu'elle est dérivable.

Correction 7 On écrit $f(x)=\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}=\frac{1}{6}+o(x^2)=\frac{1}{6}+o(x)$. On en déduit que f admet une limite finie en 0 donc elle est prolongeable par continuité en posant $f(0)=\frac{1}{6}$. Le prolongement continu de f admet un DL d'ordre 1 en 0, il est donc dérivable en 0 et $f'(0)=0$ car le coefficient devant x est nul.

Correction 8 La difficulté de cet exercice est de déterminer à quel ordre on doit faire le DL.

1. On divise par x^2, il faut donc avoir au moins un DL d'ordre 2 au numérateur pour éviter de tomber sur une forme indéterminée.
   On écrit $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc $\ln(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ d'où $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}+o(1)$, ce qui montre que la limite recherchée est $-\frac{1}{2}$.
2. On a $e^x-1=x+o(x)$ donc $x(e^x-1)=x^2+o(x^2)$.
   On a aussi $(x-1)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+1=x+x^2-1-x-\frac{x^2}{2}+1+o(x^2)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.
   On a donc
   $$\frac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)}=\frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\frac{1/2+o(1)}{1+o(1)}$$
   donc la limite recherchée est $\frac{1}{2}$.

   Attention, en faisant un DL1 de exponentielle au numérateur, cela ne marche pas! En effet, on $(x-1)(1+x+o(x))=x-1+x^2-x+o(x)+o(x^2)=-1+o(x)$. On ne pourra alors pas conclure quant à la limite!
3. Comme on divise par x^2, on cherche à faire un DL2 du numérateur. On a
   $$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2),$$
   donc
   $$\sqrt{1+2x}=1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$
   Ainsi, on a $\sqrt{1+2x}-1-x=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc la limite recherchée est $-\frac{1}{2}$.
4. On écrit
   — $cos(x)-1=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$,
   — $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et
   — $\sin(x)=x+o(x^2)$ (car le terme en x^2 est nul).
   On a donc $e^x-1-\sin(x)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et la limite cherchée est -1.
5. On met au même dénominateur :
   $$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}.$$
   On sait que le dénominateur est équivalent à x^2 (car $\sin(x)\sim x$) donc on va faire un DL 2 du numérateur. Pour cela, il suffit d'écrire $\sin(x)=x+o(x^2)$, donc $\sin(x)-x=o(x^2)$ et au numérateur, $\sin(x)=x+o(x)$ donc $x\sin(x)=x^2+o(x^2)$. En divisant par x^2 le numérateur et le dénominateur, on trouve que la limite vaut 0.
6. On réduit au même dénominateur :
   $$\frac{-\sin^2(x)+x^2\cos(x)}{x^2\sin^2(x)}.$$
   Comme le dénominateur est équivalent à x^4, il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur pour éviter d'avoir une forme indéterminée. On a $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ donc
   $$\sin^2(x)=x^2-2.x.\frac{x^3}{6}+o(x^4)=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$
   et $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc
   $$x^2\cos(x)=x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4).$$
   On a donc
   $$-\sin^2(x)+x^2\cos(x)=\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=-\frac{x^4}{6}+o(x^4).$$
   On a $\sin^2(x)=x^2+o(x^2)$ donc $x^2\sin^2(x)=x^4+o(x^4)$, ainsi, on a :
   $$\frac{-\sin^2(x)+x^2\cos(x)}{x^2\sin^2(x)}=\frac{-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$

En divisant numérateur et dénominateur par x^4, on trouve que la limite vaut $-\frac{1}{6}$.

Correction 9 On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &= \frac{1}{x^2}\left(1-\tfrac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \text{ car } \frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\to 0\\ &= \frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{x^2}}-e^{\frac{1}{(x+1)^2}} &= e^{\frac{1}{x^2}}-e^{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}\\ &= 1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\ &= \frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\end{aligned}$$

On en déduit qu'un équivalent en $+\infty$ de $e^{\frac{1}{x^2}}-e^{\frac{1}{(x+1)^2}}$ est $\frac{2}{x^3}$.

Correction 10 On écrit $\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+x+1}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+x+1}\right)\right) = \exp\left(x\ln\left(\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right)$. On a :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc :

$$\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \left(1+\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que :

$$\ln\left(\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis $x\ln\left(\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = 2+o(1)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = 2$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^2$.

Correction 11 On écrit $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k x^k + o(x^N)$, donc

$$\frac{1}{1+x^6} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k x^{6k}+o(x^{6N}),$$

puis

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k x^{6k+3}+o(x^{6N+3}).$$

On voit que le développement limité n'a pas de terme en x^n si n n'est pas de la forme $6k+3$. Cela signifie que le coefficient devant x^n est alors nul. Or, ce coefficient vaut $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc, par unicité du DL, si n n'est pas congru à 3 modulo 6, on a $f^{(n)}(0)=0$. De plus, si $n=6k+3$, le coefficient devant x^n vaut $(-1)^k$ (d'après le DL trouvé ci-dessus). Or ce coefficient vaut aussi $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (par unicité du DL) donc $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^k$ puis $f^{(n)}(0) = n!(-1)^k$.

Correction 12 La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc elle admet un DL à tout ordre en 0. On détermine un DL de f à l'ordre 2 en 0. On sait que $\ln(1+h)\sim h$ lorsque h tend vers 0 donc $\ln(\cos(x)) = \ln(1+(\cos(x)-1)) \sim \cos(x)-1$, car $\cos(x)-1\to 0$. Par ailleurs, on a $\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc $\cos(x)-1\sim -\frac{x^2}{2}$. On en déduit que

$$\ln(\cos(x)) \sim -\frac{x^2}{2} \text{ donc } \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

On utilise maintenant l'unicité des coefficients du DL, on a

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

donc, en identifiant les coefficients, on a $f'(0)=0$ et $\frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $f''(0)=-1$.

Correction 13 On pose $x=1+h$ avec h qui tend vers 0. On a alors :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln(2+h) = \ln(2)+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) = \ln(2)+\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2+o(h^2)\\ &= \ln(2)+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+o(h^2)\ln(2)+\frac{(x-1)}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+o\left((x-1)^2\right)\end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente à f en $x=1$ est $y=\ln(2)+\frac{(x-1)}{2}$. On a $f(x)-\left(\ln(2)+\frac{(x-1)}{2}\right)\sim_0 x\to 1-\frac{(x-1)^2}{8}$ et $x\mapsto -\frac{(x-1)^2}{8}$ est négative donc, au voisinage de 1, on a $f(x)\leqslant \ln(2)+\frac{(x-1)}{2}$, ce qui montre que la tangente est au-dessus de la courbe.

Correction 14 On pose $x=2+h$ avec h qui tend vers 0. On écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{2+h}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right)\\ &=\frac{1}{2}-\frac{h}{4}+\frac{h^2}{8}+o(h^2)\\ &=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{4}+\frac{(x-2)^2}{8}+o((x-2))^2.\end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente à f en $x=2$ est $y=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{4}$. Comme $f(x)-\left(\frac{1}{2}-\frac{x-2}{4}\right)\sim_0 x\to 2\frac{(x-2)^2}{8}$, au voisinage de 2, on a $f(x)\geqslant \frac{1}{2}-\frac{x-2}{4}$ donc la courbe est au-dessus de la tangente.

Correction 15

1. On a $e^x-e^{-x}=2x+o(x)$ donc $f(x)\sim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}$. On a $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ donc f est prolongeable par continuité en posant $f(0)=0$.
2. On a fait un DL à l'ordre 3 du dénominateur. On a :
$$e^x-e^{-x}=2x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$
On en déduit que :
$$f(x)=\frac{x^2}{2x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=\frac{1}{2}\frac{x}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}.$$
On pose $X=\frac{x^2}{6}+(x^3)$. Comme $X\to 0$, on a :
$$f(x)=\frac{1}{2}x\left(1+\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right)=\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}+o(x^3).$$
3. D'après ce qui précède, on a $f(x)=\frac{x}{2}+o(x)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{2}$.
4. On sait que $f(x)-\frac{x}{2}\sim\frac{x^3}{12}$ donc $f(x)-\frac{x}{2}$ est du signe de $\frac{x^3}{12}$ au voisinage de 0. La tangente est donc en dessous puis au-dessus du graphe. On dit que f admet un point d'inflexion en 0.

Correction 16

1. On a $e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+o(t^4)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=(1+t^2)^{-1/2}=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}+o(t^4)$. On en déduit que
$$\frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}=1+t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{6}+o(t^4).$$
2. Notons F une primitive de $t\mapsto\frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$, alors
$$F(x)=x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{30}+o(x^5),$$
donc
$$h(x)=F(x)-F(-x)=2x+\frac{x^5}{15}+o(x^5).$$
Remarque : On accepterait aussi une rédaction du type :
$$h(x)=\int_{-x}^{x}1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}+o(t^4)\,\mathrm{d}t=\left[t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{12}+\frac{t^5}{30}+o(t^5)\right]_{-x}^{x}=2x+\frac{x^5}{15}+o(x^5).$$

Correction 17 On écrit

$$\int_0^1\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{e^{-xt}}{x}\times\frac{1}{1+t^2}\right]_0^1-\frac{1}{x}\int_0^1\frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

or

$$\left|\int_0^1\frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1 e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1-e^{-x}}{x}\leqslant\frac{1}{x}.$$

On a donc

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^1\frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=O\left(\frac{1}{x}\right),$$

d'où

$$\int_0^1\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}-\frac{e^{-x}}{2x}+\frac{1}{x}O\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

car $\frac{e^{-x}}{2x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées.

Correction 18

1. On remarque tout d'abord que (u_n) est bien définie car pour tout $x \geqslant 0$, $x+n^2 \geqslant 0$ et $u_0 \geqslant 0$. On écrit ensuite $u_n = \sqrt{u_{n-1}^2 + (n-1)^2} \geqslant n-1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par le thm de minoration.
2. On le montre par récurrence sur n, l'initialisation étant claire. On suppose $u_n \leqslant n$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} \leqslant \sqrt{n+n^2} \leqslant \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$. La propriété est donc héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.
3. On a déjà $n-1 \leqslant u_n \leqslant n$ donc $u_n \sim n$. On écrit $u_n = n + o(n)$, on a donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \\ &= \sqrt{n-1+(n-1)^2 + o(n)} \\ &= n\sqrt{n^2 - n + o(n)} \\ &= n\sqrt{1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= n\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

On a donc $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$. On recommence avec ce nouveau développement :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \\ &= \sqrt{(n-1) - \frac{1}{2} + o(1) + (n-1)^2} \\ &= \sqrt{n^2 - n - \frac{1}{2} + o(1)} \\ &= n\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= n\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n - \frac{1}{2n} - \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Correction 19

1. pour tout $\epsilon > 0$, la fonction $f_\epsilon : x \mapsto e^{-\epsilon x} - x$ est décroissante en tant que somme de fonctions décroissantes.
2. On a $f_\epsilon(0) = 1$ et $f_\epsilon(1) < 0$. On en déduit, par le TVI qu'il existe $x_\epsilon \in]0,1[$ tel que $f_\epsilon(x_\epsilon) = 0$. Ce réel est unique par injectivité de la fonction.
   On a $0 < \epsilon x_\epsilon < \epsilon$ donc $\epsilon x_\epsilon -> 0$. On peut donc faire un DL1 de l'exponentielle :

$$e^{-\epsilon x_\epsilon} = 1 - \epsilon x_\epsilon + o(x_\epsilon \epsilon).$$

On sait que $x_\epsilon = e^{-\epsilon x_\epsilon}$ donc $x_\epsilon -> 1$ par continuité de l'exponentielle. On peut donc écrire $x_\epsilon = 1 + o(1)$. En remplaçant x_ϵ par son DL0, on obtient

$$e^{-\epsilon x_\epsilon} = 1 - \epsilon + o(\epsilon).$$

On fait maintenant un DL2 de l'exponentielle :

$$e^{-\epsilon x_\epsilon} = 1 - \epsilon x_\epsilon + \frac{1}{2}(\epsilon x_\epsilon)^2 + o(\epsilon x_\epsilon)^2.$$

puis on remplace x_ϵ par son DL1 :

$$e^{-\epsilon x_\epsilon} = 1 - \epsilon(1 - \epsilon + o(\epsilon)) + \frac{1}{2}\epsilon^2(1 + o(1)) + o\left(\epsilon^2\right) = 1 - \epsilon + \frac{3}{2}\epsilon^2 + o(\epsilon^2).$$

Comme $x_\epsilon = e^{-\epsilon x_\epsilon}$, on a bien le DL2 souhaité.

Correction 20 La fonction f est dérivable et sa dérivée f' est positive, f est donc strictement croissante. Par le théorème de croissances comparées, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - e^{-2x} - xe^{-x}\right) = +\infty.$$

Comme f est impaire, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. La fonction f étant continue, son image est un intervalle de $\mathbb{R}$ et nous venons de montrer que son image n'est ni majorée, ni minorée, on a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ et f est bien bijective.

On sait que $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$. Comme f est continue, f^{-1} aussi donc $f^{-1}(x) \to 0$ quand $x \to 0$. On a $f(x) \sim_0 x \to 0x$ donc $f^{-1}(y) \sim_0 y \to 0y$. On vaut maintenant un équivalent de $f^{-1}(y) - y$. Pour cela, on calcule un équivalent de $f(x) - x$. On a :

$$f(x) - x = 2\mathrm{sh}(x) - 2x = \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right),$$

donc :

$$f(x) - x \sim_0 x \to 0\frac{x^3}{3},$$

ce qui implique, en posant $x = f^{-1}(y)$,

$$y - f^{-1}(y) \sim_0 y \to 0\frac{\left(f^{-1}(y)\right)^3}{3}.$$

Comme $f^{-1}(y) \sim_0 y \to 0y$, on obtient :

$$f^{-1}(y) - y \sim_0 y \to 0 - \frac{y^3}{3},$$

d'où :

$$f^{-1}(y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

On remarque, enfin, que f^{-1} est impaire puisque f l'est et qu'elle est 4 fois dérivable puisque $f' \neq 0$. On en déduit qu'elle admet un DL4 avec uniquement des termes impairs. Le DL obtenu est en réalité un DL4.

On peut aussi dire que $f^{-1}(x) \sim_0 x \to 0 x$ et $f'(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ donc

$$f' \circ f^{-1}(x) = 1 + f^{-1}(x)^2 + o\left(f^{-1}(x)^2\right) = 1 + x^2 + o(x^2).$$

On en déduit que

$$\frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{1 + x^2 + o(x^2)} = 1 - x^2 + o(x^2).$$

On intègre ce DL : $f^{-1}(x) = f^{-1}(0) + x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. On retrouve bien le même DL.

Enfin, on peut utiliser l'unicité du DL en disant que f^{-1} est 4 fois dérivable puisque $f' \neq 0$ donc elle admet un DL4. Comme elle est impaire, elle admet un DL de la forme $ax + bx^3 + o(x^4)$.

On écrit $f(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$ puis

$$\begin{aligned}
f \circ f^{-1}(x) &= f^{-1}(x) + \frac{1}{3} f^{-1}(x)^3 + o(f^{-1}(x)^4) \\
&= \left(ax + bx^3 + o(x^4)\right) + \frac{1}{3} + \left(ax + bx^3 + o(x^4)\right)^3 + o(x^4) \quad . \\
&= ax + bx^3 + \frac{a^3 x^3}{3} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Or $f \circ f^{-1}(x) = x$, on a donc

$$x = ax + \left(b + \frac{a^3}{3}\right) x^3 + o(x^4),$$

donc, par unicité du DL (de $f \circ f^{-1}$), on a

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + \dfrac{a^3}{3} = 0 \end{cases}$$

d'où $a = 1$ et $b = -\dfrac{1}{3}$. On retrouve bien le DL $f^{-1}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$.

Correction 21

1. On fait un DL à l'ordre 2 de f en 0. On a $\sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x \frac{\sqrt{1+2x^2}}{1-x} \\
&= -x(1 + x^2 + o(x^2))(1 + x + x^2 + o(x^2)) \\
&= -x(1 + x^2 + x + x^2 + o(x^2)) \\
&= -x(1 + x + 2x^2 + o(x^2)) \\
&= -x - x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

   On en déduit que l'équation de la tangente en 0 de f est $y = -x$. On a $f(x) + x \sim_0 x \to 0 - x^2$ donc, au voisinage de 0, $x \mapsto f(x) + x$ est du même signe que $x \mapsto -x^2$. Localement, la courbe est donc en dessous de sa tangente en 0.

2. On écrit $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \dfrac{x\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{1}{2x^2}}}{1 - \frac{1}{x}}$. On a :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2x^2}} = 1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ et } \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

   d'où :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{2}x\left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}x + \sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}\right) = 0$ donc la droite d'équation $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$ est une asymptote. De plus, $f(x) - \left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}\right) \sim_0 x \to +\infty \dfrac{5\sqrt{2}}{4x}$ donc $f(x) - (\sqrt{2}x + \sqrt{2})$ est du même signe que $\dfrac{5\sqrt{2}}{4x}$ au voisinage de $+\infty$. On en déduit que la courbe est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

Correction 22 On écrit :

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x^3+1}\, e^{-1/x} &= x\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}\, e^{-\frac{1}{x}} \\
&= x\left(1 + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$ donc le graphe de f admet la droite $y=x-1$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$. De plus, on a $f(x)-(x-1) \sim_0 x \to +\infty \frac{1}{2x}$ donc $f(x)-(x-1)$ est positif au voisinage de $+\infty$. Le graphe de f est donc au-dessus de l'asymptote.

Correction 23 La fonction þ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc elle admet un développement limité en 0 à tout ordre. On sait que $þ(x) \sim_0 x \to 0x$ donc $þ(x)=x+o(x)$. On en déduit que $1-þ^2(x)=1-x^2+o(x^2)$. On a le développement limité de $þ'(x)$ puisque $þ'(x)=1-þ^2(x)$, on peut en déduire que

$$þ(x)=þ(0)+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

En partant d'un DL à l'ordre 1, on a obtenu un DL à l'ordre 3. On recommence : $\left(þ^2\right)'(x)=x^2-\frac{2x^4}{3}+o(x^4)$ donc $1-þ^2(x)=1-x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4)$ puis, en intégrant :

$$þ(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5).$$

Comme þ est impair, les termes d'ordre pair de son DL sont nuls donc on a :

$$þ(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6).$$

Correction 24 On a $\arctan(x)=x+o(x)$ et, comme arctan est impaire, on a $\arctan(x)=x+o(x^2)$. On en déduit que $\arctan(x^3)=x^3+o(x^6)$;

Correction 25 On a $\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)$ d'où :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2-\sqrt{1-x}} &= \sqrt{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)}\\
&=1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right)^2\\
&+\frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right)^3\\
&=1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{4}+2\frac{x}{2}\frac{x^2}{8}\right)\\
&+\frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\\
&=1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{32}+\frac{3x^3}{128}+o(x^3)
\end{aligned}$$

Correction 26 On écrit $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ puis :

$$\cos\ln(1+x)=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2+o(x^3),$$

car $o(\ln(1+x)^3)=o(x^3)$. On a donc :

$$\cos(\ln(1+x))=1-\frac{1}{2}\left(x^2-2x.\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

On utilise maintenant le DL de $\frac{1}{1-X}$ avec $X=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$, on obtient :

$$\frac{1}{\cos\ln(1+x)}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

Correction 27 On pose $x=\frac{1}{2}+h$, on a $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} h=0$. De plus, $x(1-x)=\frac{1}{4}-h^2$ donc :

$$\cos\left(\pi x(1-x)\right)=\cos\left(\pi\left(\frac{1}{4}-h^2\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\pi h^2\right).$$

On développe le cosinus, on obtient :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi h^2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\pi h^2).$$

On fait ensuite un DL de cos et sin. On a :

$$\cos\left(\pi h^2\right)=1-\frac{1}{2}\left(\pi h^2\right)^2=1+o(h^3),$$

et

$$\sin\left(\pi h^2\right)=\left(\pi h^2\right)+o(h^3),$$

d'où :

$$\cos\pi\left(\frac{1}{4}-h^2\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi h^2}{2}+o(h^3).$$

En revenant à la variable x, on obtient :

$$\cos(\pi x(1-x))=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+o\left(x-\frac{1}{2}\right)^3.$$

Correction 28 On écrit :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(x)} &= \frac{x^2}{\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2} = \frac{x^2}{x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}\\ &= 1-\frac{x^2}{3}+o(x^2).\end{aligned}$$

Un DL3 en 0 de f est $1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)$.

Correction 29 On écrit :

$$\begin{aligned}\cos(x)^x &= \exp\left(x\ln\cos(x)\right)\\ &= \exp\left(x\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\right)\\ &= \exp\left(x\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{x^3}{2}+o(x^4)\right)\\ &= 1-\frac{x^3}{2}+o(x^4).\end{aligned}$$

Un DL4 en 0 de f est $1-\frac{x^3}{2}+o(x^4)$.

Correction 30 On écrit :

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+\sqrt{1+4\sin x}}\\ =\;& \sqrt{1+\sqrt{1+4(x-\frac{x^3}{6})+o(x^3)}}\\ =\;& \sqrt{1+\sqrt{1+4x-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)}}\\ =\;& \sqrt{2+\frac{1}{2}\left(4x-\frac{2x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}\left(4x-\frac{2x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{16}\left(4x-\frac{2x^3}{3}\right)^3+o(x^3)}\\ =\;& \sqrt{2+2x-\frac{x^3}{3}-2x^2+4x^3+o(x^3)}\\ =\;& \sqrt{2+2x-2x^2+\frac{11x^3}{3}+o(x^3)}\\ =\;& \sqrt{2}\sqrt{1+x-x^2+\frac{11x^3}{6}+o(x^3)}\\ =\;& \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(x-x^2+\frac{11x^3}{6}\right)-\frac{1}{8}\left(x-x^2+\frac{11x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{16}\left(x-x^2+\frac{11x^3}{6}\right)^3+o(x^3)\right)\\ =\;& \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{11x^3}{12}-\frac{1}{8}\left(x^2-2x^3\right)+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right)\\ =\;& \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{5x^2}{8}+\frac{59x^3}{48}+o(x^3)\right)\end{aligned}$$

.

Correction 31 La dérivée de $\ln(\cos x)$ vaut $-\tan x$ dont le DL à l'ordre 6 est :

$$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6).$$

On intègre et on obtient : $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o\left(x^6\right)$.

On peut aussi poser $X=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
\ln(\cos x) & = & \ln(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)) \\
& = & \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\right) \\
& - & \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\right)^2 \\
& + & \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\right)^3 \\
& = & \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{4!}\right)-\frac{x^6}{24} \\
& = & -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o\left(x^6\right)
\end{array}$$

Correction 32 On a $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$ et $\tan x\to 0$ donc :

$$\begin{array}{rcl}
\sin(\tan x) & = & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5) \\
& - & \frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right)^3 \\
& + & \frac{1}{5!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right)^5 \\
& = & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{1}{6}\left(x^3+3x^2.\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5) \\
& = & x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5+o\left(x^5\right)
\end{array}$$

Correction 33 On a

$$\begin{array}{rl}
(\ln(1+x))^2 & =\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2 \\
& =x^2+\frac{x^4}{4}-2x.\frac{x^2}{2}+2x\frac{x^3}{3}+o(x^4) \\
& =x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+o\left(x^4\right)
\end{array}$$

Correction 34 On a

$$\begin{array}{rl}
& \exp(\sin x) \\
= & 1+\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^3 \\
= & x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right) \\
= & 1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)
\end{array}$$

Correction 35 On sait que $\sin(x)\sim_0\ x\to 0x$ donc $\sin^6(x)\sim_0\ x\to 0x$ d'où $\sin^6 x=x^6+o\left(x^6\right)$.

Correction 36 On a $\frac{\cos x-1}{2}\to 0$ donc

$$\begin{array}{rcl}
\ln(1+\cos x) & = & \ln(2+(\cos x-1)) \\
& = & \ln 2+\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right) \\
& = & \ln 2+\ln\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{2.4!}+o(x^4)\right) \\
& = & \ln 2+\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{2.4!}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{2.4!}\right)^2+o(x^4) \\
& = & \ln 2-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{2.4!}-\frac{x^4}{32}+o(x^4) \\
& = & \ln 2-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{96}x^4+o(x^4).
\end{array}$$

Correction 37 On a $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$ et :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{1+\sin x} & = & \frac{1}{1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
& = & 1-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+o(x^3) \\
& = & 1-x+\frac{x^3}{6}+x^2-x^3+o(x^3) \\
& = & 1-x+x^2-\frac{5}{6}x^3+o(x^3).
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1+\sin x} &= \left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\left(1-x+x^2-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)\right)\\ &= 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

Correction 38 On a $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)$ et

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\operatorname{ch}x} &= \frac{1}{2+\frac{x^2}{2}+o(x^3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}+o(x^3)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}+o(x^3)\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^3).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{\sqrt{1+x}}{1+\operatorname{ch}x}=\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{3x^2}{16}-\frac{x^3}{32}+o(x^3).$$

Correction 39 On écrit $e^{3+x^2}=e^3e^{x^2}$. On a $x^2\to 0$ donc :

$$e^{3+x^2}=e^3\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right)=e^3+e^3x^2+\frac{e^3x^4}{2}+o(x^5).$$

Correction 40 On pose $\operatorname{ch}(x)=e^x+e^{-x}$ On calcule son taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2},$$

et comme $\operatorname{ch}(x)-1\sim\frac{x^2}{2}$, on en déduit que le taux d'accroissement admet une limite finie en 0, égale à $\frac{1}{2}$ donc f est bien dérivable.

Correction 41 On calcule son taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2},$$

et comme $\operatorname{ch}(x)-1\sim\frac{x^2}{2}$, on en déduit que le taux d'accroissement admet une limite finie en 0, égale à $\frac{1}{2}$ donc f est bien dérivable.

Correction 42 La fonction f est la composée de cos, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction racine carrée, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Étudions sa dérivabilité en 0. On a

$$\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\sim-\frac{(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{1}{2},$$

donc le taux d'accroissement en 0 admet une limite finie ce qui montre que f est dérivable en 0 de dérivée $-\frac{1}{2}$.

Correction 43 On a $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ et $e^{\frac{1}{2n^2}}=1+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{8n^2}\right)$ donc :

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-e^{\frac{1}{2n^2}}=-\frac{1}{4n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

On a également $\ln\left(1+\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ donc :

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-e^{\frac{1}{2n^2}}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)}\sim_0 x\to 0-\frac{1}{4n\sqrt{n}}.$$

Correction 44 On écrit :

$$\sin(x)-\tan(x)=x-\frac{x^3}{6}-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+o(x^3)=-\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

$$\sqrt{1+2x}-1=x-\frac{(2x)^2}{8}+\frac{(2x)^3}{16}+o(x^3)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

et

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

On a donc :

$$\sqrt{1+2x}-1-\ln(1+x)=\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

On en déduit que $\sin(x)-\tan(x) \sim_0 x \to 0 -\dfrac{x^3}{2}$ et $\sqrt{1+2x}-1-\ln(1+x) \sim_0 x \to 0 \dfrac{x^3}{6}$ d'où :

$$\frac{\sin(x)-\tan(x)}{\sqrt{1+2x}-\ln(1+x)-1} \sim_0 x \to 0 -3,$$

et, par suite, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\tan(x)}{\sqrt{1+2x}-\ln(1+x)-1} = -3$.

Correction 45 On écrit :

$$f(x) = \frac{\tan^2(x)-\ln(1+x^2)}{\tan^2(x)\ln(1+x^2)}.$$

Le dénominateur est équivalent à x^4, il faut donc faire un DL d'ordre 4 du numérateur pour lever l'indétermination.

On écrit :

$$\begin{aligned}
\tan^2(x)-\ln(1+x^2) &= \left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^2 - \left(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)\\
&= x^2+\frac{2x^4}{3}-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\\
&= \frac{7x^4}{6}+o(x^4).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\tan^2(x)-\ln(1+x^2) \sim_0 x \to 0 \dfrac{7x^4}{6}$ donc $f(x) \sim_0 x \to 0 \dfrac{7}{6}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{7}{6}$.

Correction 46 On écrit $(\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(\cos(x))\right)$. On sait que $\cos(x) = 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ donc $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = -\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ puis $\dfrac{1}{x}\ln(\cos(x)) = -\dfrac{x}{2}+o(x^2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos(x))\right) &= \exp\left(-\frac{x}{2}+o(x^2)\right) = 1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)
\end{aligned}.$$

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1-x} = \frac{x^2}{4}+o(x^2).$$

Pour le dénominateur, on écrit :

$$\begin{aligned}
(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\sin(x))\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right)\\
&= \exp\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\\
&= e\left(\exp\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right)\\
&= e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

Comme on a :
$e^{1-\frac{x}{2}} = e.e^{-\frac{x}{2}} = e\left(1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right)$

On en déduit que :

$$(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}-e^{1-\frac{x}{2}} = \frac{ex^2}{6}+o(x^2).$$

Ainsi,

$$\frac{(\cos(x))^{1/x}-\sqrt{1-x}}{(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}-e^{1-\frac{x}{2}}} \sim_0 x \to 0 \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{ex^2}{6}},$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x))^{1/x}-\sqrt{1-x}}{(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}-e^{1-\frac{x}{2}}} = \frac{3}{2e}$.

Correction 47 On écrit :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \exp\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= e.\exp\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= e.\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

puis :

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} & x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex^2\sqrt{1-\frac{1}{x}} \\ = & x^2\left(e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ & -ex^2\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ = & \frac{7e}{12}+o(1) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex^2\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{7e}{12}$.

Correction 48 On a $\cos(x)-1\to 0$ donc $\sin(\cos(x)-1)\sim_0 x\to 0\cos(x)-1$ et $\cos(x)-1\sim_0 x\to 0-\frac{x^2}{2}$ d'où $\sin(\cos(x)-1)\sim_0 x\to 0-\frac{x^2}{2}$.

On sait, de plus, que $\sqrt{1+x^2}-1\sim_0 x\to 0\frac{x^2}{2}$. On en déduit que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\cos(x)-1)}{\sqrt{1+x^2}-1}=-1.$$

Correction 49 On écrit :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2}-x=x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right)=x\left(1+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right)=\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x=\frac{1}{3}.$$

Correction 50 On a $\sqrt{1+x^2}-1\sim_0 x\to 0\frac{x^2}{2}$ et $\cos(x)-1\sim_0 x\to 0-\frac{x^2}{2}$. On en déduit que $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\cos(x)-1}\sim_0 x\to 0-1$, donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\cos(x)-1}=-1.$$

Correction 51 On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\ln(1+x^2)} &=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}\right)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}\right)\\ &=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\right)=\frac{1}{x^2}\left(1-\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)\\ &=\frac{1}{2}+o(1)\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right)=\frac{1}{2}$.

Correction 52 On pose $h=\frac{1}{x}$. On a :

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\sin h}{h}=1-\frac{h^2}{6}+o(h^2)$$

donc :

$$\ln\left(\frac{\sin h}{h}\right)=-\frac{1}{6}h^2+o(h^2)$$

et

$$\frac{1}{h^2}\ln\left(\frac{\sin h}{h}\right)=-\frac{1}{6}+o(1).$$

On en déduit, par composition des limites, que $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)^{\frac{1}{h^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$. Comme $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)^{\frac{1}{h^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$, on a la limite souhaitée.

Correction 53 La fonction arcsin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, elle admet donc un DL en 0 à tout ordre. Pour le déterminer, on va intégrer celui de sa dérivée. On sait que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\sim_0 x\to 0\frac{x^2}{2}$, donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ et, en intégrant :

$$\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

De même, la fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un DL en 0 à tout ordre. Pour le déterminer, on va intégrer celui de sa dérivée. On sait que $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+$

$o(x^2)$ donc $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. On écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\arcsin(x)-\arctan(x)} &= \frac{x+\frac{x^3}{3}-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x+\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\ &= \frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}\\ &= 1+o(1).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\arcsin(x)-\arctan(x)} = 1.$$

Correction 54 On écrit $\sin^4(x) \sim_0 x \to 0 x^4$, déterminons un équivalent du numérateur. On écrit :

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch}(\sin(x)) - \operatorname{ch}(x)\\ = \; & \operatorname{ch}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \operatorname{ch}(x)\\ = \; & 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4 - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\\ = \; & 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2x^4}{6} + o(x^4)\right) + \frac{x^4}{4!} - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\\ = \; & -\frac{x^4}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{ch}(\sin(x)) - \operatorname{ch}(x) \sim_0 x \to 0 - \frac{x^4}{6}$ d'où :

$$\frac{\operatorname{ch}(\sin(x)) - \operatorname{ch}(x)}{\sin^4(x)} \sim_0 x \to 0 - \frac{1}{6},$$

ce qui implique $\lim_{x\to 0}(\sin(x))^{-4}(\operatorname{ch}(\sin(x)) - \operatorname{ch}(x)) = -\frac{1}{6}$.

Correction 55 On a $\sin(x) - \tan(x) = x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$. On a également :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}\\ &= 1 + \left(x - \tfrac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \tfrac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \tfrac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{\tan x} &= e^{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}\\ &= 1 + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 .\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

On en déduit que $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Le quotient est équivalent à 1, c'est par conséquent sa limite.

Correction 56 On a :

$$\begin{aligned} e^x - \cos x - x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 + \frac{x^2}{2} - x + o(x^3)\\ &= x^2 + o(x^3).\end{aligned}$$

On en déduit que la limite est 1.

Correction 57 La fonction arcsin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, elle admet donc un DL en 0 à tout ordre. Pour le déterminer, on va intégrer celui de sa dérivée. On sait que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \sim_0 x \to 0 \frac{x^2}{2}$, donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et, en intégrant :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Le numérateur est donc équivalent à $-\frac{x^3}{6}$ et le dénominateur est équivalent à x^3 donc la limite vaut $-\frac{1}{6}$.

Correction 58 On pose $x=1+h$ avec h qui tend vers 0. On écrit :

$$\begin{aligned}
x^x-x &= \exp\left((1+h)\ln(1+h)\right)-(1+h)\\
&= \exp\left((1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)\right)-1-h\\
&= \exp\left(h-\frac{h^2}{2}+h^2+o(h^2)\right)-1-h\\
&= \exp\left(h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)-1-h\\
&= 1+\left(h+\frac{h^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(h+\frac{h^2}{2}\right)^2-1-h+o(h^2)\\
&= 1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{2}-1-h+o(h^2)\\
&= h^2+o(h^2)\\
&= (x-1)^2+o\left((x-1)\right)^2.
\end{aligned}$$

On a donc $x^x-x\sim_0 x\to 1(x-1)^2$.

On écrit ensuite :

$$\begin{aligned}
1-x+\ln(x) &= -h+\ln(1+h)=-h+h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)=-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\\
&= -\frac{(x-1)^2}{2}+o\left((x-1)^2\right)
\end{aligned}.$$

On en déduit que $1-x+\ln(x)\sim_0 x\to 1-\dfrac{(x-1)^2}{2}$. En faisant le quotient, on obtient $\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln(x)}\sim_0 x\to 1-2$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)}=-2$.

Correction 59 On a $\tan(x)=\dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ donc :

$$\tan(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}.$$

Quand x tend vers 0, le dénominateur tend vers 1 et le numérateur tend vers 0 par le théorème de croissances comparées. En passant à l'exponentielle, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}=1.$$

Correction 60 On écrit $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{11}{24}x^2+o(x^2)$. Il est alors clair que f est continue en 0 et, comme elle admet un DL à l'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0. On peut, de plus, affirmer que $f'(0)=0$ car le coefficient devant x est nul.

Correction 61 On a $\cos(x)-1=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ et $\sin^2(x)=x^2+o(x^3)$. On en déduit que :

$$f(x)=\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x^2+o(x^3)}=\frac{-\frac{1}{2}+o(x)}{1+o(x)}=-\frac{1}{2}+o(x).$$

On en déduit que f admet une limite finie en 0 égale à $-\dfrac{1}{2}$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. De plus, la fonction prolongée est continue et admet un DL1 en 0, on peut donc affirmer qu'elle est dérivable.

Correction 62 On écrit $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{x}=-\dfrac{1}{2}x+o(x)$. Il est alors clair que f est continue en 0 et, comme elle admet un DL à l'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0. On peut, de plus, affirmer que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ en identifiant le coefficient devant x.

Correction 63 On écrit :

$$\begin{aligned}
e^{\cos(x)} &= e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=e.e^{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=e\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\
&= e-\frac{ex^2}{2}+o(x^2).
\end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente à f en $x=0$ est la droite d'équation $y=e$. Au voisinage de 0, on a $x\mapsto f(x)-e$ du même signe que son équivalent (qui est $-\dfrac{ex^2}{2}$) donc la tangente est au-dessus de la courbe.

Correction 64 On écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3+\sin(x)} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{\sin(x)}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}+o(x^2)}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+o(x^2)\right)\\
&= \frac{1}{3}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{27}+o(x^2).
\end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente à f en $x=0$ est $y=\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{9}$. On a, de plus, $f(x)-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{9}\right)\sim_0 x\to 0\dfrac{x^2}{27}$ donc, au voisinage de 0, on a $f(x)\geqslant\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{9}$ et la courbe est au-dessus de la tangente.

Correction 65 On a f dérivable de dérivée positive s'annulant ponctuellement donc f est strictement croissante. Ainsi, f est injective. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x-1 \leqslant f(x) \leqslant x+1$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. La fonction f étant continue, son image vaut $\mathbb{R}$ donc elle est surjective. On a montré que f est bijective, déterminons un DL3 de sa réciproque en 0. On a $f(0)=0$ donc $f^{-1}(0)=0$.

On a $f(x) = x+x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ donc $f(x) \sim_0 x \to 02x$. On pose $y=f(x)$, on a $y\to 0$ quand $x\to 0$ ce qui permet d'obtenir $f^{-1}(y) \sim_0 y \to 0\frac{y}{2}$. Cherchons maintenant un équivalent de $f^{-1}(y)-\frac{y}{2}$. Avec le même changement de variable, on a $f^{-1}(y)-\frac{y}{2} = x-\frac{f(x)}{2}$ et on sait que $x-\frac{f(x)}{2} \sim_0 x \to 0\frac{x^3}{12}$ en utilisant le DL de f. On a donc :

$$f^{-1}(y)-\frac{y}{2} \sim_0 y \to 0\frac{\left(f^{-1}(y)\right)^3}{12},$$

et comme on a montré que $f^{-1}(y) \sim_0 y \to 0\frac{y}{2}$, on a en déduit que $\frac{\left(f^{-1}(y)\right)^3}{6} \sim_0 y \to 0\frac{y^3}{96}$. Ainsi, on a le DL suivant :

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2}+\frac{y^3}{96}+o(y^3).$$

On peut aussi dire que sur $]-\pi,\pi[$, la dérivée de f ne s'annule pas donc f^{-1} est dérivable 3 fois et admet donc un DL3 de la forme $f^{-1}(x) = ax+bx^3+o(x^4)$ puisque f est impaire (et donc f^{-1} aussi).

On a $f(x) = 2x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ donc

$$\begin{aligned} f\circ f^{-1}(x) &= 2f^{-1}(x)-\frac{1}{6}f^{-1}(x)^3+o(f^{-1}(x^4)) \\ &= 2(ax+bx^3+o(x^4))-\frac{1}{6}\left(ax+bx^3+o(x^4)\right)+o(x^4) \\ &\text{car } f^{-1}(x)\sim\frac{x}{2} \\ &= 2ax+2bx^3-\frac{a^3x^3}{x^3}+o(x^4) \end{aligned}$$

Comme $f^{-1}\circ f(x) = x$, on a, par unicité du DL (de $f\circ f^{-1}$),

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b-\frac{a^3}{6} = 0 \end{cases}$$

d'où $a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{1}{12\times 8}=\frac{1}{96}$. On retrouve bien le même DL que ci-dessus.

Enfin, on peut utiliser la dérivée.

On a $f'(x) = 2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc

$$\begin{aligned} f'\circ f^{-1}(x) &= 2-\frac{f^{-1}(x)^2}{2}+o\left(f^{-1}(x)^2\right) \\ &= 2-\frac{x^2}{8}+o(x^2) \\ &\text{car } f^{-1}(x)\sim\frac{x}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)} &= \frac{1}{2-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{16}+o(x^2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{16}+o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{x^2}{32}+o(x^2) \end{aligned}$$

On intègre :

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}+\frac{x^3}{96}+o(x^3).$$

Correction 66 On a :

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \exp\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= e.\exp\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{e}{2x}-\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On écrit :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e}{2x}-\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e}{2x}\right)+\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{11}{12x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

On a $\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{11}{12x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sim_0 +\infty -\frac{11}{12x^2}$ et, par le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e}{2x}\right)=0$ donc la limite est également nulle. En passant à l'exponentielle, on obtient que la limite recherchée est 1.

Correction 67

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ donc f est continue en 0. On forme le taux d'accroissement en 0, on a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=x^{1/x}$ ce qui tend, à nouveau, vers 0 en 0 donc f est dérivable en 0 (et $f'(0)=0$. Sur $\mathbb{R}_+^\star$, f est dérivable par les théorèmes usuels.
2. On pose $x=1+y$, $y\to 0$. On a donc :
$$\begin{aligned}\left(x+\tfrac{1}{x}\right)\ln(x) &= \left(1+\frac{1}{1+y}\right)\ln(1+y)\\ &= \left(1+\left(1-y+y^2-y^3+o(y^3)\right)\right)\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)\right)\\ &= 2y-2y^2+\frac{13}{6}y^3+o(y^3).\end{aligned}$$
d'où :
$$\begin{aligned}&\exp\left(\left(1+\frac{1}{1+y}\right)\ln(1+y)\right)\\ &=1+2y-2y^2+\frac{13}{6}y^3+\frac{1}{2}\left(4y^2-8y^3\right)+\frac{1}{6}8y^3+o(y^3)\\ &=1+2y-\frac{1}{2}y^3+o(y^3).\end{aligned}$$
On en déduit que :
$$f(x)=1+2(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$
3. On a $f(x)-(1+2(x-1))\sim-\frac{1}{2}(x-1)^3$ et $x\mapsto-\frac{1}{2}(x-1)^3$ change de signe au voisinage de 1. Le graphe de f admet un point d'inflexion en 1.

Correction 68

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose $f_n : x\mapsto x^n+x-1$. La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(0)=-1$, $f_n(1)=1$. On en déduit, par le TVI, que f_n s'annule entre 0 et 1. Comme elle est strictement croissante, ce point d'annulation est unique.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $x_n\in]0,1[$ donc $x_n^{n+1}<x_n^n$. On a donc $f_{n+1}(x_n)<f_n(x_n)$. Or $f_n(x_n)=0=f_{n+1}(x_{n+1})$. On en déduit, comme f_{n+1} est croissante, que $x_n<x_{n+1}$ donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante. On a déjà montré à la question précédente qu'elle était majorée par 1.
3. D'après le thm de limite monotone, la suite converge vers un réel $\ell\leqslant 1$. Si on suppose, par l'absurde, que $\ell\neq 1$, alors $x_n^n=e^{n\ln(x_n)}\to 0$ d'où $x_n^n+x_n\to\ell$. Or, $x_n^n+x_n=1$, on obtient une contradiction. On a donc bien $x_n\to 1$.
4. On a $x_n^n=1-x_n$ donc $n\ln(x_n)=\ln(1-x_n)$. En posant $y_n=1-x_n$, on a $y_n\to 0$ donc $\ln(1-y_n)\sim -y_n$. Comme $n\ln(1-y_n)=\ln(y_n)$ on en déduit $\ln(y_n)\sim -ny_n$. On a donc bien $y_n\sim-\frac{\ln(y_n)}{n}$.

   On écrit $ny_n\sim-\ln(y_n)$, on a donc $ny_n=-\ln(y_n)+o\left(\ln(y_n)\right)$ puis
$$\ln(ny_n)=\ln\left(-\ln(y_n)+o\left(\ln(y_n)\right)\right),$$
   ou encore
$$\ln(n)+\ln(y_n)=\ln\left(-\ln(y_n)+o\left(\ln(y_n)\right)\right).$$
   On divise par $\ln(y_n)$ l'égalité précédente, on a
$$\frac{\ln(n)}{\ln(y_n)}+1=\frac{\ln\left(-\ln(y_n)+o\left(\ln(y_n)\right)\right)}{\ln(y_n)}.$$
   Reste à montrer que le membre de droite tend vers 0 ce qui peut se voir en posant $a_n=\ln\left(-\ln(y_n)+o\left(\ln(y_n)\right)\right)$. Alors $\frac{\ln\left(-\ln(y_n)+o\left(\ln(y_n)\right)\right)}{\ln(y_n)}\sim\frac{\ln(a_n)}{-a_n}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ puisque $y_n\to 1$, on a, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(a_n)}{a_n}=0$.

   Ainsi, $\frac{\ln(n)}{\ln(y_n)}+1\to 0$ d'où $\ln(n)\sim-\ln(y_n)$.
5. En combinant les deux équivalents de la question précédente, on obtient $y_n\sim\frac{\ln(n)}{n}$ donc
$$y_n=\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right),$$
   on en déduit que
$$x_n=1-\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Correction 69 On écrit

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}.\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On fait ensuite un DL de exponentielle en 0 :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{x-1}} &= e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= 1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 \\ &= 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Enfin, on multiplie par $x+1$. On obtient :

$$\begin{aligned} (x+1)e^{\frac{1}{x-1}} &= (x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x+1+1+\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x+2+\frac{5}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x)-(x+2)\to 0$ donc le graphe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y=x+2$. De plus, $f(x)-(x+2)\sim_{+\infty}\frac{5}{2x}$ donc $f(x)-(x+2)$ est positif au voisinage de $+\infty$. On en déduit que le graphe de f est au-dessus de l'asymptote.

Correction 70 On écrit $\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}=\arctan\sqrt{\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$.

On a $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} &= \left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= 1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}} &= \sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 \\ &= 1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2x}-\frac{5}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Enfin, on doit calculer un DL à l'ordre 2 de $h\mapsto\arctan(1+h)$ en 0. Pour cela, on fait un DL à l'ordre 1 en 0 de $h\mapsto\frac{1}{1+(1+h)^2}$. On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+(1+h)^2} &= \frac{1}{2+2h+h^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\left(h+\frac{h^2}{2}\right)+o(h)\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-h+o(h)) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{h}{2}+o(h). \end{aligned}$$

On intègre le développement limité, on obtient :

$$\arctan(1+h)=\arctan(1)+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{4}+o\left(h^2\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{4}+o(h^2).$$

On pose $h=\frac{1}{2x}-\frac{5}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $o\left(h^2\right)=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ d'où :

$$\begin{aligned} \arctan\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x}-\frac{5}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}-\frac{5}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 \\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4x}-\frac{5}{16x^2}-\frac{1}{16x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4x}-\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Le graphe admet la droite $y=\frac{\pi}{4}$ pour asymptote horizontale (ce que l'on savait déjà) et grâce au développement asymptotique, on sait que le graphe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ car la fonction $x\mapsto f(x)-\frac{\pi}{4}$ est du même signe que $x\mapsto\frac{1}{4x}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction 71

1. On écrit
$$\begin{aligned}\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan y+1}{1-\tan y}\\ &= (1+\tan y)(1+\tan y+\tan^2 y+o(\tan^2 y))\\ &= \left(1+y+o(y^2)\right)\left(1+y+y^2+o(y^2)\right)\\ &= 1+2y+2y^2+o(y^2)\end{aligned}$$
On en déduit que $\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-1\sim 2y$ quand y tend vers 0.

2. On pose $y+\frac{\pi}{4}=\arctan(X+1)$. On a bien $y\to 0$ quand $X\to 0$. De plus, on a $X+1=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$ et $y=\arctan(X+1)-\frac{\pi}{4}$. D'après ce qui précède, on a $\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-1\sim 2y$. On en déduit que $(X+1)-1\sim 2\left(\arctan(X+1)-\frac{\pi}{4}\right)$ soit encore $\arctan(X+1)-\frac{\pi}{4}\sim\frac{X}{2}$ quand X tend vers 0. On a donc $\arctan(X+1)=\frac{\pi}{4}+\frac{X}{2}+o(X)$.

   On recommence : $\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-1-2y\sim 2y^2$ donc $(X+1)-1-2(\arctan(X+1)-\frac{\pi}{4})\sim 2\left(\arctan(X+1)-\frac{\pi}{4}\right)^2$, et, en utilisant la question précédente, on obtient :
$$(X+1)-1-2(\arctan(X+1)-\frac{\pi}{4})\sim\frac{X^2}{2}$$
   On en déduit que
$$\arctan(X+1)=\frac{\pi}{4}+\frac{X}{2}-\frac{X^2}{4}+o(X^2)$$

3. On cherche à déterminer l'équation de l'asymptote en $-\infty$. On écrit :
$$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$
   quand $x\to-\infty$. On pose $X=\frac{x}{x-1}-1$. On a bien $X\to 0$ quand $x\to-\infty$ et d'après la question précédente, on a donc :
$$\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$
   On a donc $x\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{x\pi}{4}+o(1)$. On en déduit que la droite d'équation $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi x}{4}$ est asymptote au graphe de la fonction quand x tend vers $-\infty$.

4. Pour déterminer la position de l'asymptote par rapport au graphe, il faut déterminer le signe de $x\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{x\pi}{4}\right)$ au voisinage de $-\infty$. D'après la question 2, on sait que
$$\arctan(X+1)=\frac{\pi}{4}+\frac{X}{2}-\frac{X^2}{4}+o\left(X^2\right).$$
   On va y injecter le développement en $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ de $\frac{x}{x-1}$. On a
$$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-1/x}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
   donc :
$$\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
   d'où :
$$x\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{x\pi}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$
   On en déduit que la différence entre la fonction et l'équation de l'asymptote est équivalente, en $-\infty$ à $\frac{1}{4x}$. La fonction $x\mapsto\frac{1}{4x}$ étant négative au voisinage de $-\infty$, on en déduit que le graphe est en-dessous de l'asymptote.