

**Devoir maison 6.**  
*à rendre le 28 janvier.*

---

**Exercice 1.**

Soient  $p$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $0 \leq p \leq n$ .

On rappelle la notation:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1. **Préliminaires:** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$  une matrice de  $M_m(\mathbb{R})$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  des réels. On note  $N = (\alpha_j m_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$  et  $R = (\alpha_i m_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ .
  - (a) Exprimer  $\det(N)$  en fonction de  $\det(M)$ .
  - (b) A-t-on  $\det(R) = \det(N)$ ?

2. **Déterminant  $d_p$ .**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $A_p = (a_{i,j})$  la matrice carrée de  $M_{n-p+1}(\mathbb{R})$  dont le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est égal à  $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$  avec  $(i,j) \in \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket^2$ . On note  $d_p = \det(A_p)$ .

- (a) Expliciter les entiers  $r$  et  $s$  tels que  $a_{i,j} = \binom{s}{r}$  pour les quatre coefficients  $a_{1,1}, a_{1,n-p+1}, a_{n-p+1,1}$  et  $a_{n-p+1,n-p+1}$ .
- (b) Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , calculer les déterminants  $d_n, d_{n-1}$  et  $d_{n-2}$ .
- (c) On suppose que la matrice  $A_p$  possède au moins deux lignes. On note  $L_i$  la ligne d'indice  $i$ .
  - i. Dans le calcul de  $d_p$  on effectue les opérations suivantes: pour  $i$  variant de 2 à  $n-p+1$ , on retranche la ligne  $L_{i-1}$  à la ligne  $L_i$  (opération codée:  $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ ). Déterminer le coefficient d'indice  $(i,j)$  de la nouvelle ligne  $L_i$ .
  - ii. En déduire une relation entre  $d_p$  et  $d_{p+1}$ , puis en déduire  $d_p$ .

3. **Déterminants  $D_n$  et  $\Delta_n$**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $D_n$  le déterminant de la matrice carrée  $M_{n+1}(\mathbb{R})$  dont le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est  $(i+j)!$ , les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à  $n$ .

On note  $D_n = \det((i+j)!)$ . Avec les mêmes notations, on note  $\Delta_n = \det \left( \binom{i+j}{i} \right)$  pour  $(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ . On fixe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (a) Calculer les déterminants  $D_0, D_1, D_2, \Delta_0, \Delta_1$  et  $\Delta_2$ .
- (b) Donner une relation entre  $D_n$  et  $\Delta_n$ .
- (c) En déduire  $\Delta_n$  puis  $D_n$ .