

Devoir maison 6.

à rendre le 28 janvier.

Exercice 1.

Soient p et n deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$.

On rappelle la notation:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

1. **Préliminaires:** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ une matrice de $M_m(\mathbb{R})$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ des réels. On note $N = (\alpha_j m_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ et $R = (\alpha_i m_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$.

- (a) Exprimer $\det(N)$ en fonction de $\det(M)$.
- (b) A-t-on $\det(R) = \det(N)$?

2. **Déterminant d_p .**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $M_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i, j) \in \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket^2$. On note $d_p = \det(A_p)$.

- (a) Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \binom{s}{r}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}$, $a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.
- (b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, calculer les déterminants d_n , d_{n-1} et d_{n-2} .
- (c) On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i .
 - i. Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes: pour i variant de 2 à $n-p+1$, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée: $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i, j) de la nouvelle ligne L_i .
 - ii. En déduire une relation entre d_p et d_{p+1} , puis en déduire d_p .

3. **Déterminants D_n et Δ_n**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée $M_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à n .**

On note $D_n = \det((i+j)!)$. Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$ pour $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Calculer les déterminants D_0 , D_1 , D_2 , Δ_0 , Δ_1 et Δ_2 .
- (b) Donner une relation entre D_n et Δ_n .
- (c) En déduire Δ_n puis D_n .